BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
B
66
NAPOLI

# NOUVEAUX ELEMENS DES SECTIONS CONIQUES,

## LES LIEUX GEOMETRIQUES, LA CONSTRUCTION, OU EFFECTION DES EQUATIONS,

*Par M. DE LA HIRE de l'Academie Royale des Sciences.*

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI VITTORIO EMANUELE III

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë Saint Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXIX.
*AVEC PRIVILEGE DU ROY.*

# A MONSEIGNEUR

## MONSEIGNEUR

# COLBERT,

CONSEILLER DU ROY en tous ſes Conſeils, & au Conſeil Royal, Secretaire d'Eſtat & de ſes Commandemens, Grand Treſorier de ſes Ordres, Sur-Intendant des Bâtimens, Arts & Manufactures de France, Marquis de Seignelay, &c.

MONSEIGNEVR,

*J'eus l'honneur il y a quelques années de mettre au jour ſous la*

*protection de voſtre Nom un Traité des Sections Coniques ; & bien que je n'euſſe pas alors le bon-heur d'être connu de vous, je me perſuaday, que les Sciences & les Arts vous étant redevables de l'état floriſſant où nous les voyons, ce que je faiſois pour l'accroiſſement de la Geometrie, devoit faire auſſi une partie de la reconnoiſſance commune, que vous doivent tous les Gens de Lettres. Ce ne ſont plus des motifs ſi generaux qui me portent maintenant,* MONSEIGNEVR, *à Vous conſacrer les nouveaux Ouvrages que je donne au Public. Car depuis ce temps, Vous avez fait paroître tant de bonté pour moy, & Vous m'avez traitté avec tant de diſtinction, en me faiſant la grace de me procurer l'agrément du Roy pour être l'un de ſes Geometres dans l'Academie des Scien-*

*ces, avant même que j'euſſe osé aſpirer à cet honneur, que j'ay crû devoir faire les derniers efforts pour Vous donner autant que je le puis, des marques du vif reſſentiment que j'ay d'une faveur ſi ſinguliere. C'eſt ſans doute ce deſir,* MONSEIGNEVR, *qui m'a fait découvrir les nouveautez que je prens la liberté de Vous preſenter, non ſeulement ſur les Sections Coniques, dont j'explique icy les Elemens d'une maniere nouvelle par les plus ſimples proprietez des lignes; mais encore ſur les Lieux Geometriques, & ſur la Conſtruction des Equations. Car quand je conſidere la difficulté de ces matieres, qui bien que tres-utiles dans la Geometrie n'ont eſté juſqu'à preſent que legerement ébauchées; je regarde l'éclairciſſement que je tâche icy d'en donner, pluſtoſt comme un effort que la reconnoiſſance*

*m'a fait faire, que comme un fruit de mes travaux, & un effet de mon application. Mais quelque ſoin que j'aye pris de perfectionner ces Ouvrages & quelque ſuccez qu'ils puiſſent avoir, je croirois toûjours avoir inutilement travaillé, s'ils ne me ſervoient principalement à vous témoigner le profond reſpect avec lequel je ſeray toute ma vie,*

*MONSEIGNEUR,*

DE VÔTRE GRANDEUR,

Le tres-humble & tres-obeïſſant ſerviteur,

DE LA HIRE.

*Extrait du Privilege du Roy.*

PAR Lettres Patentes du Roy, données à Saint Germain en-Laye le 4. Février 1679. Signées, Par le Roy en ſon Conſeil, DALENCE', & ſcellées du grand Sceau de cire jaune : Il eſt permis à noſtre bien amé ANDRE' PRALARD, Libraire & Imprimeur à Paris, d'imprimer ou faire imprimer, vendre & debiter par tous les lieux de l'obeïſſance de ſa Majeſté, les Livres intitulez, *Les Elemens des Sections Coniques, les Lieux Geometriques, la Conſtruction univerſelle des Equations*, durant le temps & eſpace de ſix années conſecutives, avec deffence à tous Libraires, Imprimeurs, & autres perſonnes de quelle qualité qu'elles ſoient, de l'imprimer & debiter, à peine de trois mil livres d'amande, comme il eſt plus au long porté par leſdites Lettres.

*Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs. Fait à Paris e 6. Février* 1679.

Signé, E. COUTEROT, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le 6. Avril 1679.

*Les Exemplaires ont eſté fournis.*

---

## *Fautes à corriger.*

PAg. 5. *ligne* 9. coſté le, *liſez* coſté deux fois le.
Pag. 353. *à la figure l'une des extremitez de l'Axe doit eſtre* A, *& celle qui eſt marquée* D *doit eſtre* B.

*Dans la Preface de la conſtruction des* Equations *il faut lire* Meſolabe *au lieu de* Meſolable.

*Il ne ſera pas difficile de ſuppleer quelques lignes qui manquent dans les figures.*

# LES SECTIONS CONIQUES.

## PREFACE.

*IL y a quelques années que je fis imprimer un Traité des Sections Coniques d'une nouvelle Methode, où je démontray leurs principales proprietez dans le Cone : mais ceux qui n'avoient pas assez d'habitude aux démonstrations des rencontres des plans & des solides, avoient de la peine à entendre celles qui y sont, quoy qu'elles soient fort simples, lorsqu'on les peut bien comprendre. Ce fut ce qui me donna occasion de chercher quelqu'autre maniere, où décrivant simplement ces lignes courbes sur un plan, & sans me servir du Cone, je puisse y démontrer les mesmes proprietez que dans le solide ; & apres avoir tenté la Methode dont je me sers icy, comme la plus belle & la plus simple de toutes, je l'abandonnay, n'ayant pû surmonter pour lors toutes les difficultez que j'y rencontray, & je me contentay de réduire le Cone & ses Sections en plan, que je nommay Planiconiques, j'appliquay à ces Sections planes les mesmes démonstrations que j'avois faites pour les solides, & je puis dire que cet Ouvrage eut assez de bon-heur pour meriter l'approbation des plus Sçavans Geometres.*

*Mais quoy qu'il soit tres-avantageux de plaire aux Sçavans, on ne doit pas en faire le principal objet de l'étude, & negliger entiere-*

*ment d'inſtruire ceux qui ont la volonté d'apprendre, & je croy qu'ils doivent eſtre contens lorſqu'on leur donne des voyes differentes pour venir à un meſme but, car chacun en peut choiſir une ſuivant ſon inclination & la portée de ſon genie.*

*Sans m'arreſter icy à faire un dénombrement de ceux qui ont bien écrit de cette Science, & à rapporter les manieres differentes de deſcriptions dont ils ſe ſont ſervis, je montreray ſeulement quelle difference il y a entre ma Methode & celle de M. de Witt, qui eſt eſtimé avec juſtice le plus excellent de tous ceux qui ont pris ce meſme chemin.*

*Il ſe ſert pour la deſcription de chaque Section d'une Methode particuliere, qui eſt embaraſſée (principalement dans la Parabole & dans l'Hyperbole) de pluſieurs lignes qui s'entrecoupent dans de certains angles, ce qui ne donne pas d'abord une idée claire & nette de la formation de ces lignes; au lieu que la deſcription dont je me ſers, qui eſt tirée de la principale proprieté des Foyers, n'a pour regle qu'une ſeule ligne égale à la ſomme dans l'Ellipſe, & à la difference dans l'Hyperbole, de deux autres, qui ſont tirées des deux Foyers à un point de la ligne que l'on décrit; & dans la Parabole la ſomme & la difference s'y trouve tout enſemble; car outre ſon Foyer qui eſt déterminé ſur l'axe, ſi l'on en ſuppoſe encore un autre à diſtance infinie ſur l'axe & vers le dedans de la Parabole, il eſt évident que la ſomme des deux lignes qui ſeront menées d'un des points de la Parabole à ces deux*

*Foyers, ſera égale à une meſme, qui ſera menée du Foyer qui eſt à diſtance infinie juſques à la ligne, qui eſtant perpendiculaire à l'axe, le rencontre en un point qui eſt autant éloigné de la rencontre de la Parabole que le Foyer a déterminé; & ſi l'on ſuppoſe un autre Foyer à diſtance infinie ſur l'axe vers le dehors de la Parabole, il eſt auſſi évident que la difference de deux lignes menées d'un des points de la Parabole à ce Foyer indéterminé, & à celuy qui eſt déterminé, ſera par tout égale à une meſme ligne. Ce ſont ces proprietez qui ont le plus grand uſage dans la Geometrie : mais ſur tout dans la Catoptrique, la Dioptrique, & l'Aſtronomie*

*Ie ſuis perſuadé que M. de Witt n'a choiſi des manieres de deſcriptions compoſées, que pour en tirer plus aiſément des démonſtrations ſimples, ce qu'il n'a pourtant pas pû faire dans l'Ellipſe, lorſqu'il veut démontrer les proprietez de tous les diametres. La démonſtration que j'en donne a quelque rapport avec celle des Anciens, mais elle eſt beaucoup plus ſimple.*

*Cet Ouvrage contient toutes les proprietez elementaires des Sections Coniques, où je ne ſuppoſe qu'une parfaite connoiſſance des ſix premiers Livres d'Euclide, ou des meſmes choſes qui ſont contenuës dans ces ſix Livres, & qui ont eſté démontrées fort diverſement par pluſieurs Sçavans Geometres.*

*Ie n'ay point changé les noms qu'Apollonius a donnez à ces lignes courbes, d'autant que l'uſage les a confirmez, & que je démontre*

*dans la ſuite les proprietez deſquelles ils ſont tirez.*

*La Parabole prend ſon nom de l'égalité qu'il y a entre les quarrez des ordonnées à un diametre, & les rectangles appliquez à ſon parametre, & qui ont pour hauteur les parties de ce diametre priſes entre ſon extremité & la rencontre des ordonnées; ce que je démontre dans le Corollaire 1. de la premiere Propoſition, & dans la 14. de la Parabole.*

*L'Ellipſe eſt ainſi nommée à cauſe que les rectangles que l'on compare en grandeur au quarré des ordonnées, étant appliquez au parametre, & ayant pour hauteur les parties du diametre faites par les ordonnées, ſont tous défaillans d'un rectangle ſemblable; ce que je démontre dans les 5. & 18. Prop. de l'Ellipſe.*

*Dans l'Hyperbole les meſmes rectangles comparez en grandeur au quarré des ordonnées, ſont tous excedens d'un rectangle ſemblable; ce que je démontre dans les 3. & 22. Propoſitions de l'Hyperbole.*

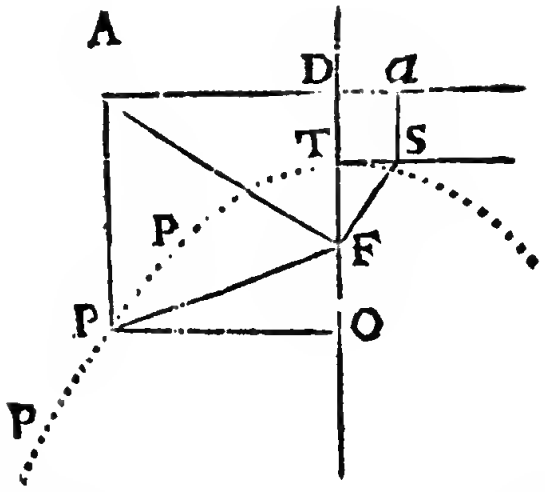
*On trouvera dans ce Traitté ce qu'il y a de plus utile dans le premier Livre d'Apollonius, les proprietez des Aſymptotes du ſecond, avec les premieres Propoſitions du troiſiéme, & celles des Foyers qui y ſont les plus conſiderables.*

*Dans les proportions dont je me ſers, je ne cite que la compoſition, la diviſion, & l'égalité de raiſon, ſuppoſant celles qui ne font que changer l'ordre des termes, ſans les nommer, & je comprens meſme la converſion de raiſon dans la diviſion.*

# LA PARABOLE.

## GENERATION DE LA PARABOLE.

*SI il y a ſur un Plan une ligne droite* A D *& un point* F *hors de cette ligne. Je dis que l'on peut trouver une infinité de points, comme* P P; *enſorte que la ligne* F P *menée du point* F *à chaque point* P *ſoit égale à* P A *menée du meſme point* P *perpendiculairement à* A D.




De quel point l'on voudra de la ligne A D, comme A, ayant mené A P perpendiculaire à A D, & ayant tiré F A; ſoit fait l'angle A F P egal à l'angle F A P; le point P ſera l'un de ceux que l'on cherche, & ainſi à l'infiny.

## COROLLAIRE.

Par le point F ayant mené la ligne F D perpendiculaire à A D; il eſt evident que la ligne qui paſſera par les points P coupera F D en deux egalement en T, & que cette ligne

PPT s'augmente à l'infiny, & qu'elle s'eloigne auſſi à l'infini de la ligne FD prolongée vers F.

## DEFINITIONS.

1.

La ligne PPT formée par les points P eſt appellée PARABOLE.

2.

Le point F, LE FOYER de la Parabole.

3.

La ligne DFO L'AXE.

4.

La ligne PO menée de l'un des points P de la Parabole perpendiculairement à l'Axe, eſt appellée ORDONNEE à l'Axe.

5

Toutes les lignes menées dans la Parabole paralleles à l'Axe ſont appellées DIAMETRES.

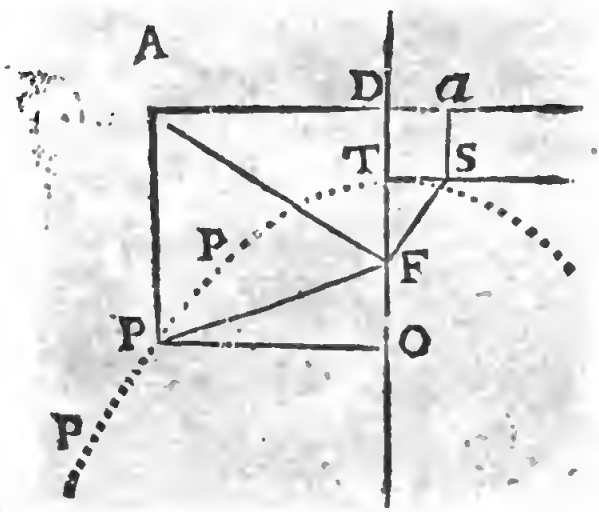
6.

Une ligne droite qui ne rencontre la Parabole qu'en un ſeul

point, & qui ne paſſe pas par dedans, eſt appellée TOUCHANTE en ce point.

## PROPOSITION I.

*Suppoſant la generation precedente de la Parabole. Je dis que le quarré d'une Ordonnée* P O *eſt égal au rectangle de deux fois* F D *ſur* T O *partie de l'Axe priſe entre ſon extremité* T *& la rencontre* O *de l'ordonnée.*



D O eſt egale à A P qui eſt egale à F P *par la generation* & le quarré de F P eſt egal au quarré de F O ; plus le quarré P O ; & le quarré de D O eſt egal au quarré de F O plus deux fois le rectangle O T, D F, oſtant donc des deux ſommes égales le quarré de F O commun, il reſtera d'un coſté le quarré de P O, & de l'autre coſté le rectangle, O T, D F, qui ſeront egaux, ce qui eſtoit propoſé.

## COROLLAIRE I.

Il eſt evident par ce qui a eſté demontré cy-deſſus que le quarré de chaque Ordonnée P O eſt egal à un rectangle d'une meſme ligne, qui eſt double de F D, ſur T O partie de l'Axe compriſe entre ſon extremité T, & la rencontre de l'Ordonnée.

## DEFINITION.

La ligne egale à deux fois F D eſt

appellée PARAMETRE de l'Axe.

## COROLLAIRE 2.

On voit que le Foyer eſt éloigné de l'extremité de l'Axe, du quart de ſon Parametre.

## COLLORAIRE 3.

On connoiſt encore clairement que les quarrez de chaque Ordonnée ſont entr'eux comme les parties de l'Axe, priſes entre ſon extremité & la rencontre des meſmes Ordonnées, puiſqu'ils ſont tous egaux à des rectangles qui ont ces parties de l'Axe pour baſe, & pour hauteur commune le Parametre.

## PROPOSITION II.

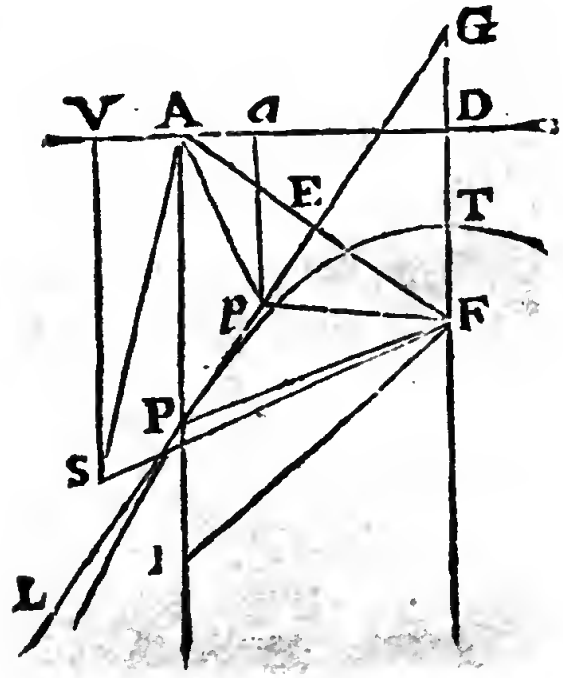
*La ligne droite* T S *menée par le point* T *parallele à* P O, *touche la Parabole au meſme point* T. *

Premierement qu'elle la rencontre s'il eſt poſſible en quel point S: ayant mené S *a* parallele à l'Axe; F S, & S *a* ſeront egales *par la generation*: F S ſera donc egale à F T, puiſque F T, T D & S *a* ſont egales; ce qui eſt abſurd: car dans le triangle rectangle F T S le coſté F S qui ſoutient l'angle droit eſt le plus grand de tous. Secondement, il eſt encore moins poſſible que T S ſoit toûjours au dedans de la Parabole, car elle paſſeroit entre D *a* & T S: c'eſt pourquoy ce qui eſt propoſé eſt vray.

* *Figure precedente.*

## PROPOSITION III.

*Suppoſant toûjours la meſme choſe Je dis qu'un diametre* P I *ne rencontre la Parabole qu'en un ſeul point* P , *& qu'il paſſe au dedans.*



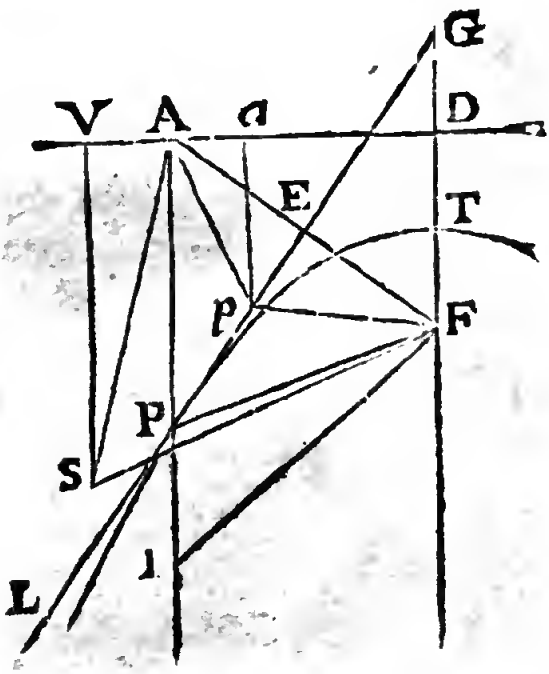

Si le diamettre P I rencontroit encore la Parabole en quelque autre

point I ; *par la generation* les lignes I F, I A ſeroient egales : mais P F & P A le ſont auſſi par la meſme raiſon: c'eſt pourquoy P F & P I jointes enſemble ſeront égales à I F, ce qui eſt abſurd ; car les deux coſtez d un triangle pris enſemble ſont plus grands que l'autre coſté.

Deplus la Parabole s'éloignant toûjours de plus en plus de ſon Axe T F *par la generation*, elle s'éloignera auſſi du diamettre P I parallele à l'Axe, & qu'elle rencontre en P : c'eſt pourquoy P eſt au dedans de la Parabole, ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION IV.

*Les meſmes choſes eſtant poſée comme cy devant, ayant tiré* F A, *& l'ayant diviſée en deux egalement en* E, *ſoit mené* P E. *Ie dis que la ligne droite* P E *touche la Parabole en* P.




Si P E ne touche pas la Parabole

en P, qu'elle la rencontre encore en quelque autre point *p* s'il eſt poſſible. Que l'on tire *p* F au foyer, & *p a* parallele à l'Axe. La ligne P E eſt perpendiculaire à la baſe du triangle Iſoſcelle F P A, puiſqu'elle la diviſe en deux egalement en E : c'eſt pourquoy A *p*, & F *p* ſont egales : mais *a p* eſt egale à F *p par la generation de la Parabole*; *a p* eſt donc egale à A *p*, ce qui eſt abſurd car l'angle *p a* A eſt droit : la ligne PE rencontre donc la Parabole ſeulement au point P.

Mais s'il eſt poſſible que la Parabole depuis le point P ſoit toûjours au delà de la ligne E P L à l'égard de l'Axe; c'eſt à dire que la partie P L ſoit au dedans de la Parabole; De quelqu'un de ſes points qui ſont au delà comme S, ayant mené S F au Foyer, & S V parallele à l'axe; *par la generation* S F & S V ſeront egales: mais S A eſt plus grande que S V à cauſe de l'Angle droit S V A: S A ſera donc plus grande que S F, ce qui eſt

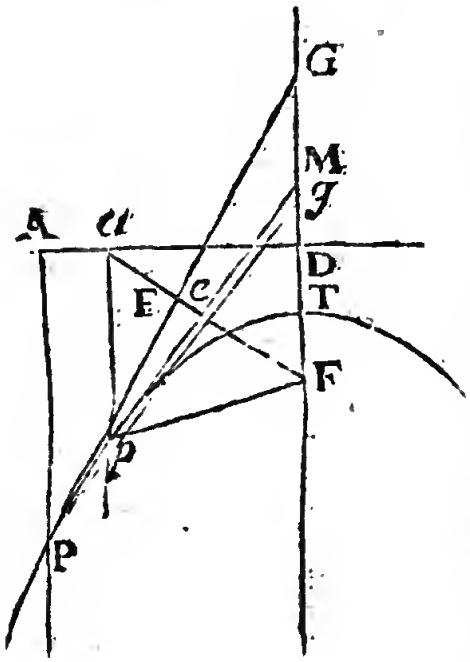
au contraire : car la ligne E P L coupe en deux egalement la ligne A F ; & luy eſt perpendiculaire: c'eſt pourquoy ce qui eſtoit propoſé eſt vray.

## COROLLAIRE.

Il eſt evident que l'Angle F G E fait par la touchante P G avec l'Axe, eſt egal à l'angle F A D, qui eſt egal à l'angle A P E ou F P E: car les deux tringles F G E, F A D ſont rectangles, & ont un angle commun au point F : de meſme au triangle P A E l'angle au point A eſt egal à l'angle A F D à cauſe des paralleles A P, F D; & le triangle F P E eſt egal & ſemblable au triangle A P E. Il eſt auſſi apparent que le triangle P F G eſt Iſoſcelle.

## PROPOSITION V.

*Il ne peut y avoir qu'une touchante* P E G *qui rencontre une Parabole en un meſme point* P.




S'il eſtoit poſſible qu'il y en eut une autre P *g*. Par le Foyer F ayant mené F *a* perpendiculaire à P *g* ; F *a* rencontrera A D en quelque point *a* : car cette touchante P *g* rencontre toûjours l'Axe ne pouvant luy eſtre parallele, car elle ſeroit diametre, & paſſeroit au dedans de

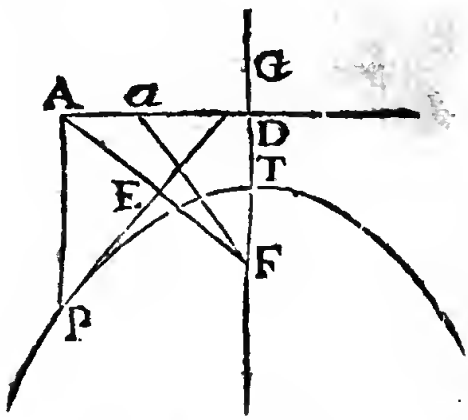
la Parabole : ayant mené *a p* parallele à l'Axe, & qui rencontrera la Parabole en *p*, *p* F ſera egale à *p a par la generation* : F *a* eſtant diviſé e en deux egalement en *e*, la ligne droite *p e* M ſera touchante en *p*, & parallele à P *g par la propoſition precedente* : Mais la touchante P E rencontre l'autre touchante *p e* hors de la Parabole, puis qu'elles ſont toutes deux touchantes ; c'eſt pourquoy P *g* parallele à *p e* paſſera au dedans de la Parabole ; ce qui eſt abſurd, car elle eſtoit poſée touchante, & elle devoit eſtre tout-à-fait hors de la Parabole. Ce qui eſt propoſé eſt donc vray.

## COROLLAIRE.

On voit par ce qui eſt démontré cy-deſſus, que toutes les touchantes rencontrent l'Axe, & tous les Diametres ; & qu'elles ſe recontrent toutes, puiſque *par la quatriéme Propoſition* elles ne ſont pas paralleles.

# PROPOSITION VI.

*Trouver une touchante qui faſſe avec l'Axe vers la Parabole, & du coſté de la touchante, un angle moindre que quelqu'angle donné que ce ſoit, pourveu qu'il ne ſoit pas plus grand qu'un droit.*

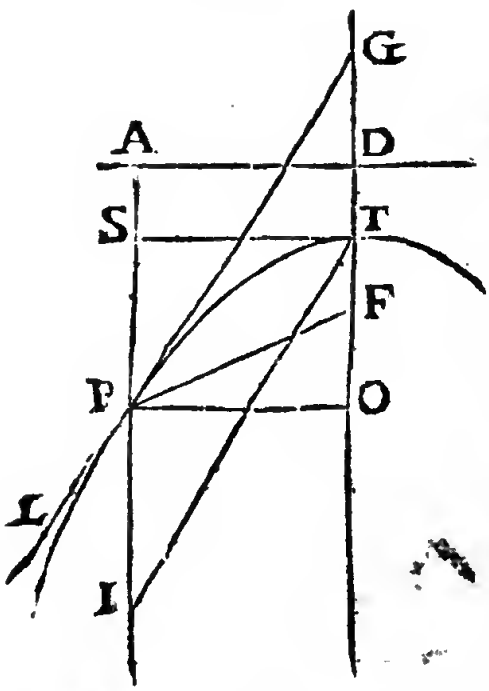



Soit mené F *a*, en ſorte que l'angle F *a* D ſoit egal à l'angle donné; ſoit pris le point A au delà du du point *a* à l'eſgard de l'Axe: Il eſt evident que l'angle F A D ſera moindre que l'Angle F *a* D donné; & *par le Coroll. de la* 4. *Prop.* la ligne P E G menée par le point P. ou A

P parallele à l'Axe rencontre la Parabole, & par le point E qui diviſe en deux egalement la ligne F A, ſera touchante en P, & fera avec l'axe l'angle P G F egal à l'angle F A D moindre que l'angle F *a* D donné. Ce qui eſtoit propoſé.

## PROPOSITION VII.

*Suppoſant toûjours les meſmes choſes que cy-devant. Je dis que la partie* T G *de l'Axe, compriſe entre ſon extrémité* T, *& la rencontre de la touchante en* G, *eſt egale à la partie* T O *compriſe entre la meſme extremité* T *& la rencontre* O *de l'ordonnée* P O *menée par le point touchant* P *de la meſme touchante.*




*Par le Corollaire de la* 4. *Prop.* le triangle P G F eſt Iſoſcelle ; F G eſt donc egale à F P qui eſt egale à P A *par lageneration*, ou à D O à cauſe que P O eſt parallele à A D : & ſi des egales F G, D O l'on oſte les egales F T, D T, les lignes T G, T O qui reſteront feront egales : Ce qui eſtoit propoſé.

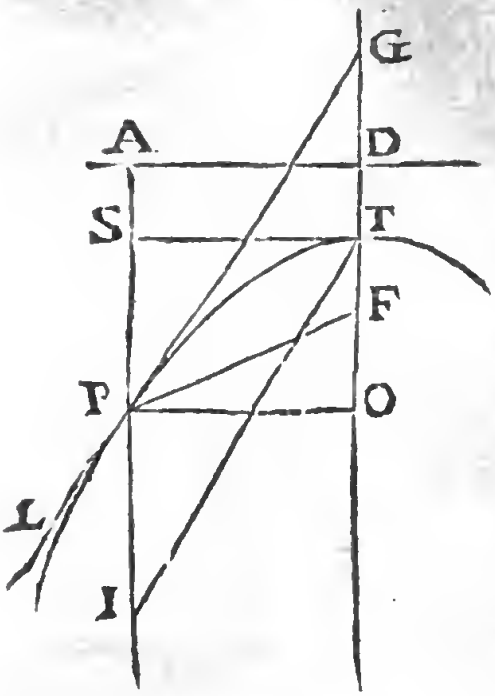
## COROLLAIRE.

Si par le Point T on mêne la touchante T S juſques au Diametre A P I, & la ligne T I parallele à la ouchante P G ; Il s'enſuit que P S

& P I ſont egales : car P S eſt egale à T O, & P I egale à T G.

## PROPOSITION VIII.

*Les meſmes choſes demeurant toûjours. Je dis que l'angle* I P L *compris par la touchante* L P *& par le diamettre* P I *mené par le point touchant, eſt egal à l'angle* F P G *compris par la meſme touchante* L P G *& par la ligne* F P *menée du Foyer au point touchant* P, *en ſorte que ces deux angles ſont des deux coſtez du point* P. *ſur la touchante.*



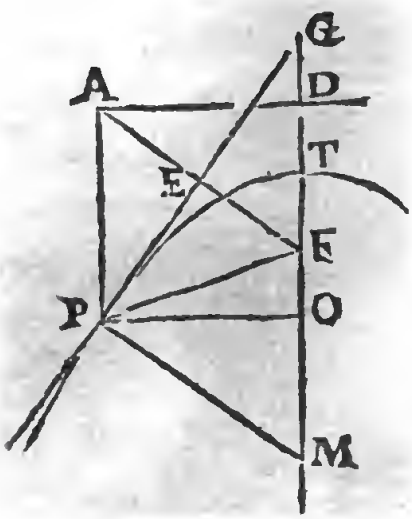

*Par le Coroll. de la 4. Prop.* l'angle F P G eſt egal à l'angle G P A qui eſt egal à l'angle L P I: c'eſt pourquoy l'angle I P L eſt egal à l'angle F P G: ce qu'il falloit demontrer.

## COROLLAIRE.

On voit encore que l'angle L P F eſt egal à l'angle G P I en adjouſtant aux angles egaux I P L, F P G, l'angle commun F P I.

## PROPOSITION IX.

*Supposant toûjours les mesmes choses: si par le point touchant* P *on mêne une perpendiculaire* P M *à la touchante jusques à l'Axe en* M. *Je dis que la partie* O M *de l'Axe prise entre l'ordonnée* P O *& le point* M, *est egale à la moitié du Parametre de l'Axe.*



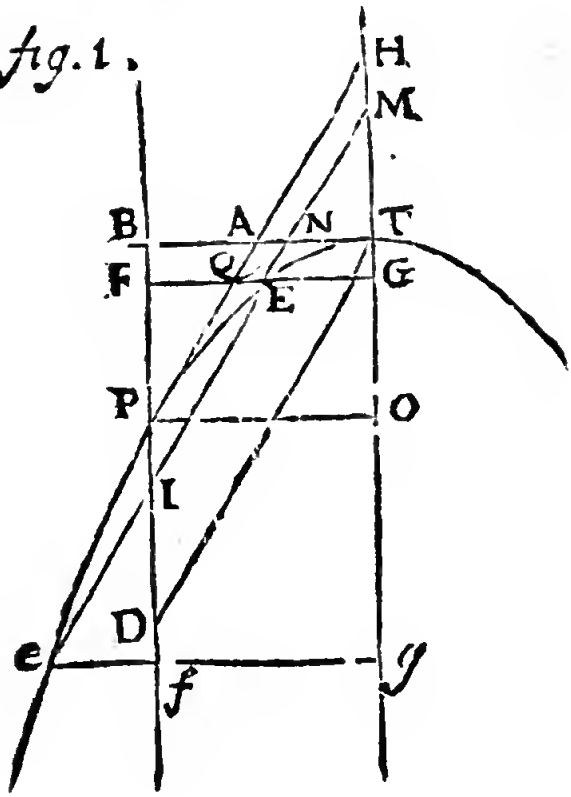

La ligne P G est perpendiculaire à F A; c'est pourquoy A F & P M sont paralleles: mais à cause des paralleles A P, D M, & A D, P O; les triangles A D F,

O M ſont egaux & ſemblables : c'eſt pourquoy O M eſt egale à D F, qui eſt egale à la moitié du Parametre *par ſa definition*. Ce qui eſtoit propoſé.

## PROPOSITION X.

*Dans la Parabole* T E P *dont l'Axe eſt* T O *& une touchante* P H *en* P *rencontrant l'Axe en* H; *& la touchante* T B *par l'extremité* T *de l'Axe rencontrant le diametre* D P B *en* B. *Ie dis que le triangle* T A H *fait par les deux touchantes, & par l'Axe, eſt egal & ſemblable au triangle* B A P *fait par les meſmes touchantes, & par le diametre* P B.

*fig. 1.*



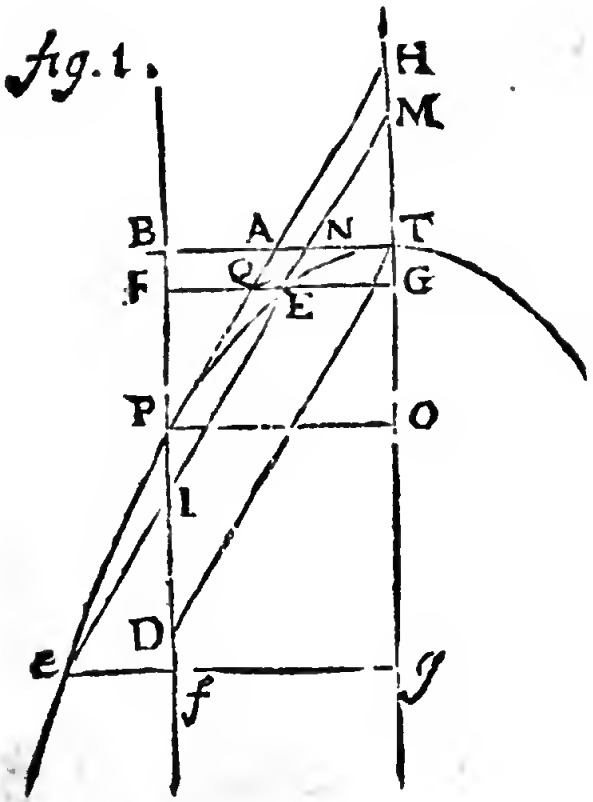

Ayant mené P O ordonnée à l'Axe, T O, eſt égale à T H, *par la 7. Prop.* Mais B P eſt egale à T O; B P ſera donc egale à T H, elles ſont auſſi parelleles: c'eſt pourquoy les triangles T A H, B A P ſont egaux & ſemblables. Ce qui eſtoit propoſé.

## COROLLAIRE.

Ayant mené T D parallele à P H, ſi l'on adjoute le quadrilatere T D P A à chacun de ces triangles egaux; le triangle T D B ſera egal au parallelogramme T D P H ou a ſon egal le rectangle T O P B à cauſe des baſes egales T O, T H, ce qui eſt encore egal au triangle P O H.

## PROPOSITION XI.

*Les meſmes choſes eſtant poſées, ſi de quelque point* E *de la Parabole on mêne* E G, E M *paralleles aux touchantes. Je dis que le triangle* E G M *eſt egal au rectangle* G T B F.



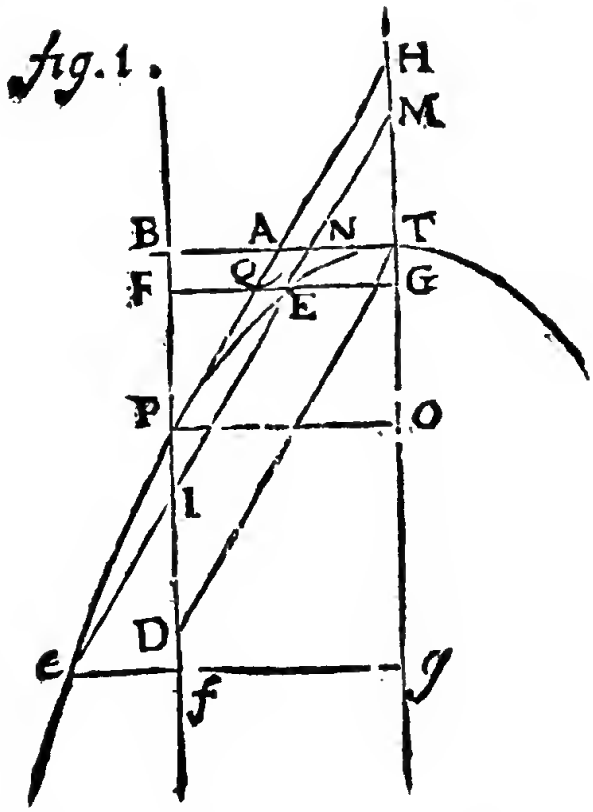

A cauſe des paralleles, le triangle P O H eſt au triangle E G M, comme le quarré de P O au quarré de E G: mais *par le Coroll. 3. de la 1. Prop.* le quarré de P O eſt au quarré de E G, comme T O à T G; & T O eſt à T G comme le rectangle T O P B au rectangle T G F B; & en raiſon egale le triangle P O H eſt au

au triangle EGM, comme le rectangle TOPB au rectangle TGFB; mais le triangle POH, eſt égal au rectangle TOPB, *par le Corollaire de precedente Propoſition*; c'eſt pourquoy le triangle EGM eſt égal au rectangle TGFB. Ce qui eſtoit propoſé.

On démontrera de méme que le triangle *cg*M eſt égal au rectangle T*gf*B.

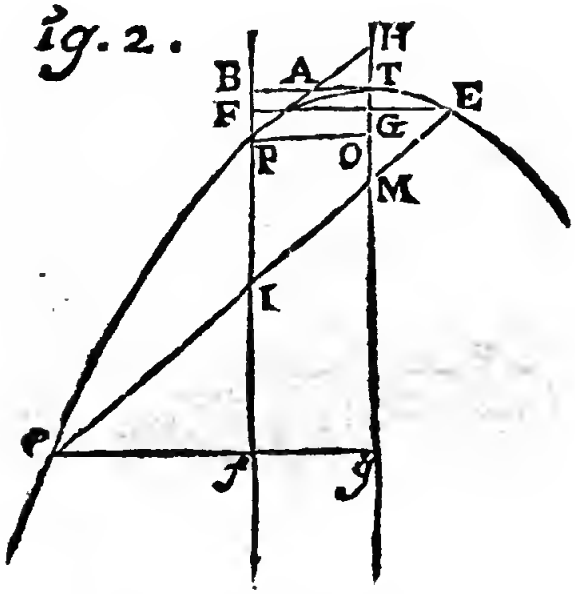
## PROPOSITION XII.

*Les meſmes choſes eſtant poſées. Je dis que le triangle* EFI *eſt égal au Parallelogramme* PIMH.




Si le point E eſt entre P & T : *par le Corollaire de la* 10. *prop.* le triangle POH eſt égal au rectangle POTB, deſquels ſi l'on oſte des choſes égales, à ſçavoir du triangle, le triangle MEG; & du rectangle, le rectangle TGFB égal au triangle MEG; & de chacun le quadrilatere PQGO, il reſtera le quadrilatere EQHM

gal au triangle QFP, auſquels ſi on ajoûte le commun quadrilatere PIEQ, le parallelogramme PIHM ſera égal au triangle EFI.




Mais ſi le point E eſt au delà du point T à l'égard de P: *par la* 10. *prop.* le triangle ABP eſt égal au triangle ATH, & en leur ajoûtant la commune figure PIMTA; le parallelogramme PIMH ſera égal au quadrilatere IMTB, duquel ſi l'on oſte le rectangle GTBF, & qu'on

luy ajoûte le triangle G E M qui luy eſt égal *par la* 11. *propoſ.* le triangle E F I ſera égal au parallelogramme P I M H : ce qui eſtoit propoſé.

* Enfin ſi le point E eſt de l'autre coſté de P comme en *e* : le triangle T A H eſtant égal au triangle A B P *par la* 10. *prop.* ſi l'on ajoûte à chacun la figure T *g f* P A ; le quadrilatere H *g f* P ſera égal au rectangle T *g f* B, auquel le triangle *g e* M eſt égal *par la precedente* ; ſi l'on oſte donc du quadrilatere H *g f* P, & de ſon égal le triangle M *g e*, le quadrilatere commun M *g f* I, il reſtera le parallelogramme P I M H égal au triangle *e f* I. Ce qui eſtoit propoſé en tous les cas.

* *Figures precedentes* 1. *&* 2.

# PROPOSITION XIII.

*Les meſmes choſes eſtant poſées. Si d'un point* E *de la Parabole on méne une ligne droite* E e *parallele à une touchante* P H. *Je dis que* E e *rencontre la Parabole en un autre point* e, *& qu'elle eſt coupée en deux également en* I *par le Diametre* P I *mené par le point touchant* P. *

Si la touchante eſtoit B T, la choſe eſt claire *par la Generation*: mais ſi c'eſt une autre touchante comme P H, *par la 6. prop.* on peut trouver une touchante qui fera avec l'Axe un angle moindre que l'angle G H P du meſme coſté de l'Axe: c'eſt pourquoy cette touchante rencontrera la touchante P H d'un coſté de P, & la touchante T A la rencontrera de

* *Voyez les Figures precedentes* 1. *&* 2.

l'autre; & la ligne E *e* parallele à P H, ayant un point ſur la parabole, rencontrera auſſi ces deux touchantes dehors ou ſur la parabole des deux coſtez du diametre P I & la Parabole auſſi en 2. points E *e*; ce qui eſtoit premierement propoſé.

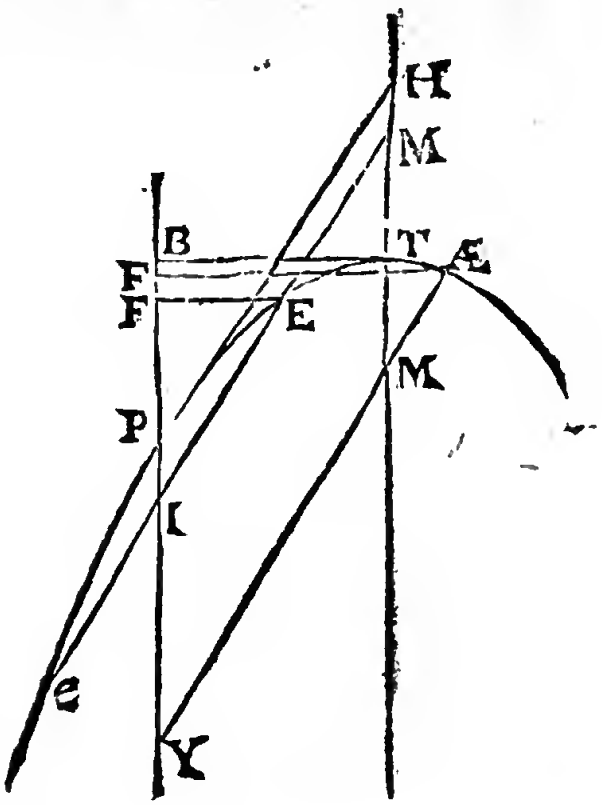
*Par la precedente propoſition* le triangle E F I eſt égal au parallelogramme P I M H, auquel eſt auſſi égal le triangle *e f* I; c'eſt pourquoy ces deux triangles ſont égaux: mais ils ſont ſemblables à cauſe des lignes paralleles qui les forment: E I ſera donc égale à *e* I. Ce qui eſtoit propoſé.

## DEFINITION.

On appelle ORDONNE'ES à un Diametre les lignes paralleles à la touchante qui paſſe par l'extrémité de ce diametre; de meſme que les perpendiculaires à l'Axe ſont appellées ſes Ordonnées.

## PROPOSITION XIV.

*Suppoſant toûjours les meſmes choſes que dans les precedentes. Je dis que les quarrez des Ordonnées* E I, Æ Y *à un meſme diametre* P I, *ſont entr'eux comme les parties* P I, P Y *de ce meſme diametre, & qui ſont compriſes entre ſon extremité* P, *& la rencontre des Ordonnées* I, Y.



A cauſe des triangles ſemblables EFI, ÆFY, le triangle EFI eſt au triangle ÆFY, comme le quarré de EI au quarré de ÆY : mais *par la precedente propoſition*, le triangle EFI eſt égal au parallelogr. PIMH, & le triangle ÆFY eſt égal au parallelogr. PYMH, & ces parallelogr. ſont entr'eux comme PI à PY: c'eſt pourquoy le quarré de EI eſt au quarré de ÆY, comme PI à PY. Ce qui eſtoit propoſé.

Il en eſt de meſme, ſi les Ordonnées ſont de l'autre coſté du diametre comme *e*I; car elles ſont égales aux precedentes *par la 13. prop.*

## DEFINITION

### DU PARAMETRE.

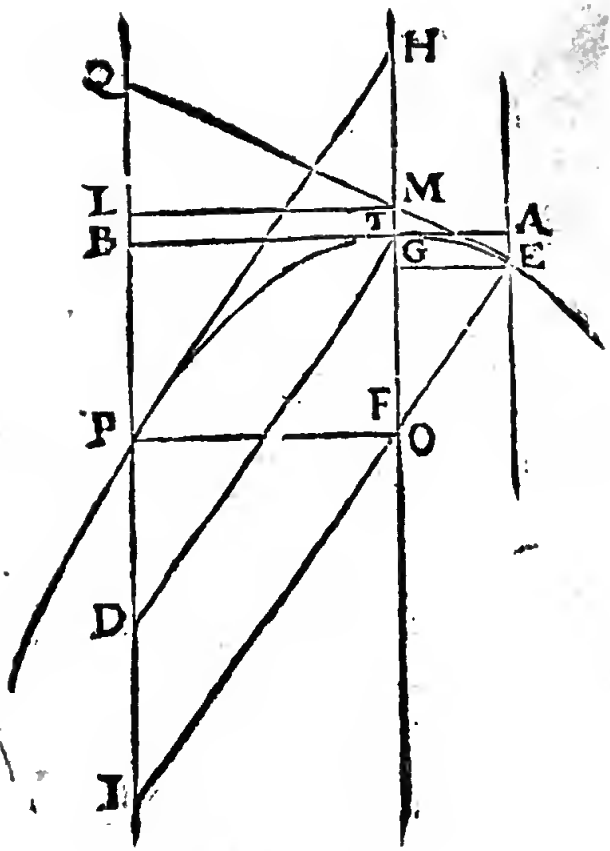
La troiſiéme proportionnelle à la partie du diametre comme PI, & à l'Ordonnée à ce diametre par le point I comme IE, eſt appellée PARAMETRE du diametre PI.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que les quarrez de toutes les Ordonnées, comme ÆY à un diametre PY, ſont égaux aux rectangles faits du Parametre, & de la partie PY du diametre priſe entre ſon extrêmité P, & la rencontre Y. de chaque Ordonnée à ce meſme diametre.

## PROPOSITION XV.

*Si par le point* E *d'une Parabole on mene une touchante* EQ *rencontrant quelque diametre* PQ *en* Q, *& ſi par le meſme point* E *on mene une Ordonnée* EI *à ce meſme diametre. Je dis que* PQ *&* PI *ſont égales.*




Soit l'Axe TF & BTA touchante en T, & PH touchante en P, qui ſera parallele à E I *par la* 13. *prop.* à laquelle ſoit auſſi parallele la ligne T D ; & que M L., E G, PO ſoient paralleles à B A : *par le Coroll.* 3. *de la premiere prop.* le quarré de P O ou

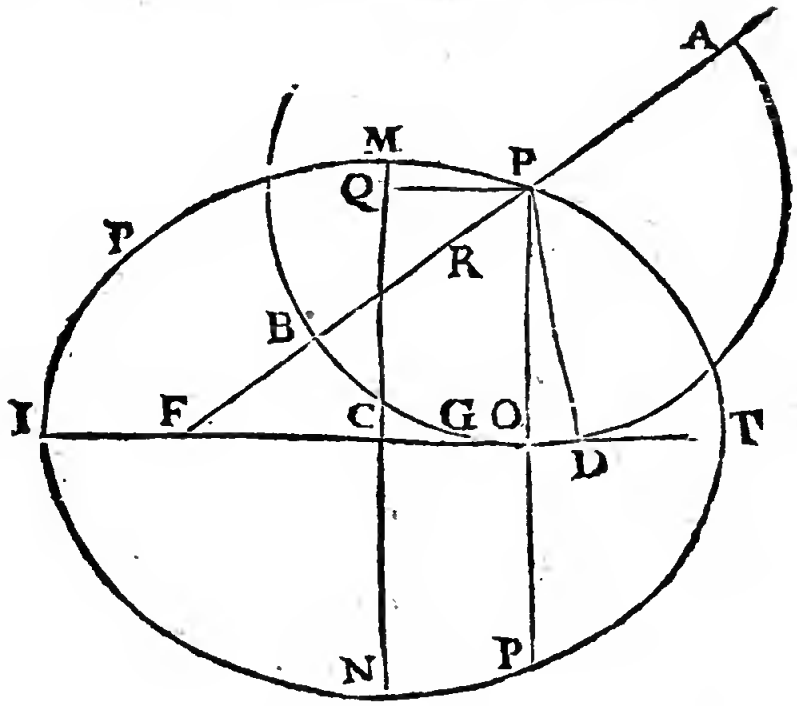
de ſon égale B T eſt au quarré de E G, comme T O à T G, ou comme leurs doubles B D à M G; & à cauſe des paralleles le quarré de B T eſt au quarré de G E, comme le quarré de B D au quarré de G F; c'eſt pourquoy le quarré de B D eſt au quarré de G F, comme B D à M G; G F ſera donc moyenne proportionnelle entre B D & M G. Semblablement le quarré de B T ou le quarré de L M eſt au quarré de G E, comme le quarré de Q L au quarré de M G: c'eſt pourquoy le quarré de Q L eſt au quarré de M G, comme B D à M G: Q L ſera donc auſſi moyenne proportionnelle entre les meſmes B D, M G: c'eſt pourquoy G F & Q L ſont égales; & ſi on leur ajoûte les égales L B, T G, & encore les égales B P, T H; l'une des ſommes P Q ſera égale à l'autre ſomme F H, qui eſt égale à P I à cauſe des paralleles. Ce qui eſtoit propoſé.

# L'ELLIPSE.

## GENERATION DE L'ELLIPSE.

*SI il y a ſur un Plan une ligne droite* IT, *coupée en deux également au point* C, *& les points* F, D, *ſur la meſme ligne également éloignez du point* C. *Je dis que l'on peut trouver autant de points que l'on voudra comme* P, *en ſorte que les deux lignes droites* PF, PD, *menées de ce point* P,

*aux deux points* F, D, *eſtant jointes enſemble, ſoient égales à* I T.




Si l'on diviſe I T en deux parties telles que l'on voudra, & que l'une de ces parties ſoit le demi-diametre d'un cercle qui ait pour centre le point F, & que l'autre partie ſoit le demi-diametre d'un autre cercle qui ait pour centre le point D, ces deux cercles s'entrecouperont en deux points P, l'un deſſus & l'autre deſſous

la ligne I T, qui en ſeront également éloignez ; & la ligne qui joindra ces deux points P, ſera perpendiculaire à I T ; & par cette meſme maniere l'on poura trouver une infinité de points comme P. Ce qui eſtoit propoſé.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que la ligne formée par les points P P paſſera en I & en T ; que cette ligne P P T I enferme un eſpace ; & enfin que toutes les lignes, comme POP perpendiculaires à I T, & terminées à la ligne P P d'un coſté & d'autre de I T, ſont coupées en deux également en O par la meſme ligne I T.

## DEFINITIONS.

1.

La ligne P P I T eſt appellée ELLIPSE.

2.

Le point C, CENTRE de l'Ellipſe.

3.

La ligne droite I T, le grand Axe.

4.

Et la ligne droite N C M perpendiculaire à I T, & qui passant par le centre C, est terminée à l'Ellipse, est appellée le petit Axe.

5.

Les points F, D, les Foyers.

6.

Les lignes droites menées des points de l'Ellipse perpendiculairement aux Axes, sont appellées Ordonnées aux Axes, comme P O Ordonnez à l'Axe I T.

7.

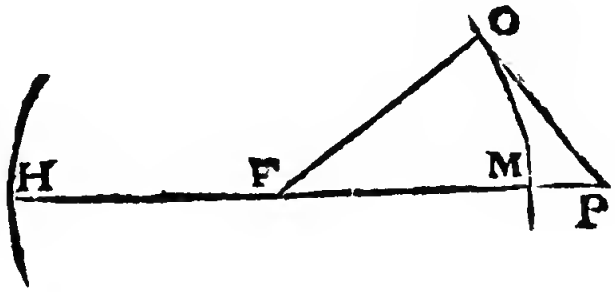
Toutes les lignes droites qui passant par le centre C, se terminent à l'Ellipse, sont appellées Diametres.

8.

Une ligne droite qui ne peut rencontrer l'Ellipse qu'en un point, est appellée Touchante en ce point-là.

## LEMME.

*En tout triangle rectangle* FOP, *le rectangle fait de* PH *ſomme de l'hypotenuſe* FP *& de l'un des coſtez* FO, *ſur* MP *difference des meſmes, eſt égal au quarré de l'autre coſté* PO.



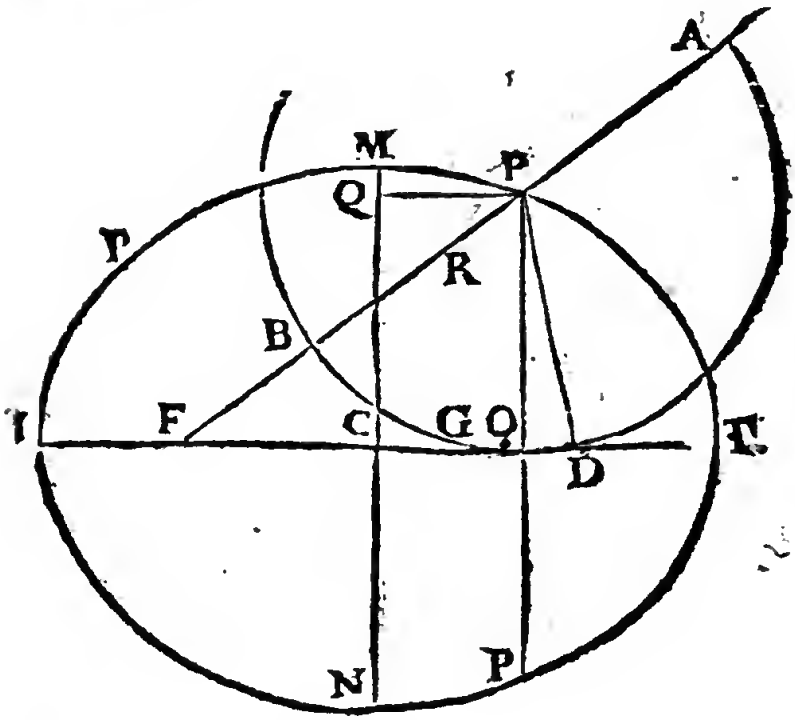

Du point F pour centre & pour demi-diametre FO, ayant décrit le cercle MOH, & prolongé PF juſques au cercle en H; le coſté PO touchera le cercle en O à cauſe de l'angle droit: c'eſt pourquoy le rectangle PM, PH, eſt égal au quarré de PO. Ce qui eſtoit propoſé.

## PROPOSITION I.

*L'Ellipſe eſtant formée par la Methode precedente. Je dis que le quarré d'une Ordonnée* PO *au grand Axe* IT *eſt au rectangle* IO, OT *des parties de cet Axe faites par la rencontre de l'Ordonnée, comme le rectangle* IF, FT *au quarré de* IC *ou de* CT. *

Ayant prolongé FP en A, ſoit fait FA égale à IT, laquelle ſoit diviſée en deux également au point R; du point P pour centre & demi-diametre PD ou PA ſon égale ſoit décrit le cercle ADB qui rencontrera AF en B, & IT en G, ſi les points D & O ne ſont pas joints enſemble; car s'ils eſtoient joints, les trois points DOG ne ſeroient qu'un meſme point, & le

cercle toucheroit IT en O : mais posons premierement que les trois points DOG ne sont pas unis ensemble.




A cause du cercle ADB le rectangle FA, FB est égal au rectangle FD, FG; c'est pourquoy FA est à FD, comme FG à FB, & leurs moitiez FR ou CT son égale est à CD, comme CO à RP; & en composant CT est à CT plus CD, comme CO à CO plus RP; &

par conſequent CT à CO, comme CT plus CD à CO plus RP ; & en compoſant encore CT à CT plus CO (ce qui eſt enſemble égal à IO,) comme CT plus CD, (qui ſont enſemble égales à ID) à CT plus CD plus CO plus RP : mais CT plus CD plus CO plus RP ou leurs égales FR plus RP plus FC plus CO, ſont enſemble égales à la ſomme de FP, FO: c'eſt pourquoy CT à IO, comme ID à FP, FO enſemble.

Semblablement reprenant la proportion cy-deſſus, CT a CD, comme CO a RP ; & diviſant CT a CT moins CD, comme CO a CO moins RP ; & par conſequent CT a CO, comme CT moins CD a CO moins RP ; & diviſant encore CT eſt à CT moins CO (ce qui eſt égal à OT,) comme CT moins CD (ce qui eſt égal à DT) à CT moins CD moins CO plus RP : mais CT moins CD moins CO plus RP, ou leurs égales FR plus RP moins FC moins CO,

ſont enſemble égales à la difference de FP, FO : c'eſt pourquoy CT a OT, comme DT a la difference de FP, FO.

Si l'on fait donc des rectangles avec les grandeurs des dernieres proportions des deux articles precedens priſes par ordre dans l'un & dans l'autre, on aura le quarré de CT au rectangle IO, OT, comme le rectangle ID, DT, au rectangle de la ſomme de FP, FO, ſur la difference des meſmes, lequel rectangle eſt égal au quarré de PO, *par le Lemme precedent*. Ce qu'il falloit démontrer.

Si les points DGO ſont unis enſemble, ce ſera toûjours la meſme démonſtration, car FG, FO, FD, ſeront égales. Ce qui n'y peut rien changer.

## PROPOSITION II.

*Les meſmes choſes eſtant poſées. Je dis que le rectangle* ID, DT, *eſt égal au quarré de* CM, *qui eſt la moitié du petit Axe.* *

En ſuppoſant que MC ſoit une Ordonnée, *par la precedente propoſ.* le quarré de CT eſt au rectangle IC, CT qui eſt encore le quarré de CT, comme le rectangle ID, DT au quarré de MC; c'eſt pourquoy le quarré de MC eſt égal au rectangle ID, DT, ou bien au rectangle IF, FT qui luy eſt égal. Ce qui eſtoit propoſé.

* *Voyez la precedente Figure.*

## PROPOSITION III.

*Suppoſant l'Ellipſe comme cy-devant. Je dis que le quarré du petit Axe* NM *eſt au quarré du grand Axe* IT, *comme le quarré d'une Ordonnée* PO *au grand Axe, au rectangle* IO, OT *des parties de cet Axe faites par l'Ordonnée.* *

*Par la premiere propoſ.* le quarré de CT eſt au rectangle ID, DT qui eſt égal *par la precedente propoſ.* au quarré de CM, comme le rectangle IO, OT au quarré de PO : mais le quarré de IT eſt quadruple du quarré de CT, & le quarré de NM eſt auſſi quadruple du quarré de CM ; c'eſt pourquoy le quarré de IT eſt au quarré de NM, comme le rectangle IO, OT au quarré de PO. Ce qui eſtoit propoſé.

* *Voyez la precedente Figure.*

## III. PROPOSITION IV.

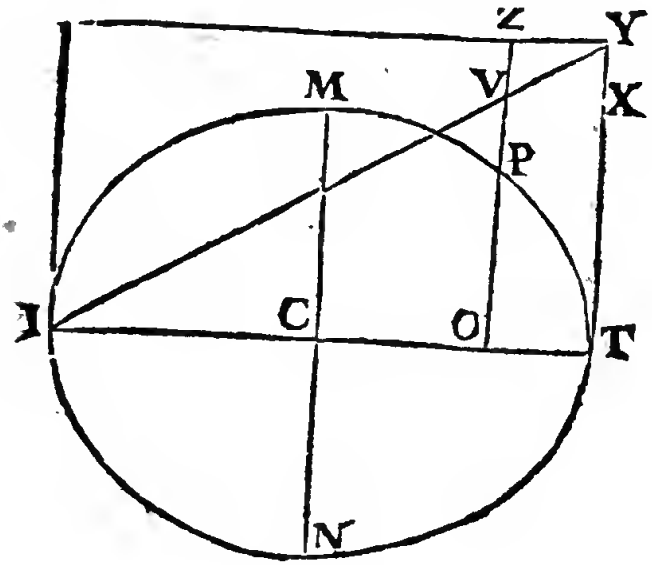
*Je dis de plus que le quarré de* PQ *Ordonnée au petit axe eſt au rectangle* NQ, QM *qui ſont les parties du meſme axe faites par* Q *rencontre de l'Ordonnée, comme le quarré du grand axe* IT *au quarré du petit axe* NM. *

*Par les premiere & ſeconde propoſ.* le quarré de CT eſt au quarré de CM, comme le rectangle IO, OT (qui eſt égal au quarré de CT moins le quarré de CO) au quarré de PO, & en diviſant le quarré de CT eſt au quarré de CT moins le quarré de CT plus le quarré de CO, comme le quarré de CM au quarré de CM moins le quarré de PO, ce qui eſt auſſi *par la precedente propoſ.* le quarré de IT au

* *Voyez la precedente Figure.*

quarré de NM, comme le quarré de CO ou de PQ au rectangle NQ, QM égal au quarré de CM moins le quarré de PO ou de CQ. Ce qui estoit proposé.

## DEFINITIONS.




1.

La troisiéme proportionnelle aux deux Axes est appellée Parametre du premier de la proportion, en sorte que si l'on fait comme le grand Axe IT au petit Axe NM, ainsi le petit Axe

Axe NM a une ligne droite YT, cette ligne YT eſt appellée le Parametre du grand Axe, & de meſme pour le petit Axe.

2.

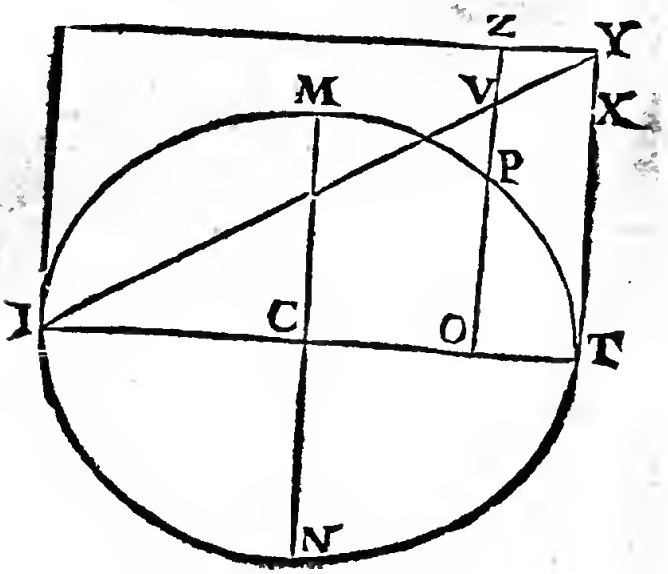
La FIGURE d'un Axe eſt le rectangle fait de cet Axe & de ſon Parametre, comme la figure du grand Axe IT eſt le rectangle IT, TY.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que le quarré d'un Axe eſt égal à la figure de l'autre Axe.

## PROPOSITION V.

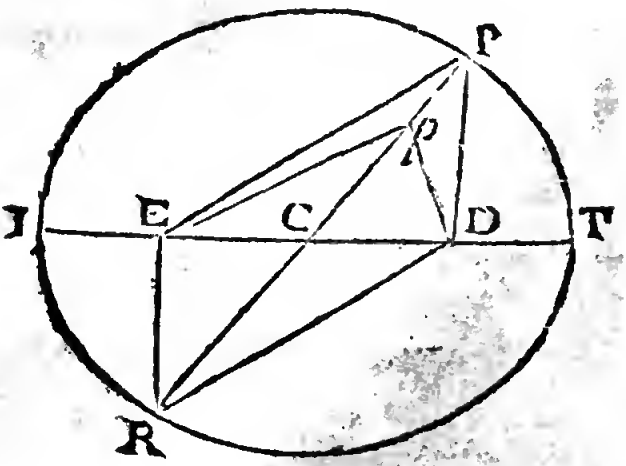
*Suppoſant toûjours l'Ellipſe, comme cy-devant, le quarré d'une Ordonnée* PO *à un Axe* IT, *eſt égal au rectangle* OTXV *appliqué au Parametre* TY *de cet Axe, ayant pour hauteur ſa partie* TO *priſe entre ſon extremité* T, *& la rencontre* O *de l'Ordonnée* PO, *lequel rectangle eſt défaillant d'un rectangle* VXYZ *ſemblable, & ſemblablement poſé à la figure* IY.



*Par la 3. ou 4. Propoſ.* le quarré de NM eſt au quarré de IT, comme le quarré de PO au rectangle IO, OT: mais *par la proprieté du Parametre*, le quarré de NM eſt au quarré de IT, comme YT à IT, & comme YT à IT, ainſi VO à IO, ou bien ainſi le rectangle VO, OT au rectangle IO, OT, ayant pris OT pour hauteur commune, & en raiſon égale le quarré de PO eſt au rectangle IO, OT, comme le rectangle VOTX au rectangle IO, OT: c'eſt pourquoy le quarré de PO eſt égal au rectangle OTXV, qui étant appliqué à TY, défaille du rectangle VY ſemblable & ſemblablement poſé à la figure IY. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION VI.

*Tous les Diametres comme* PR, *ſont coupez en deux également par le centre* C.

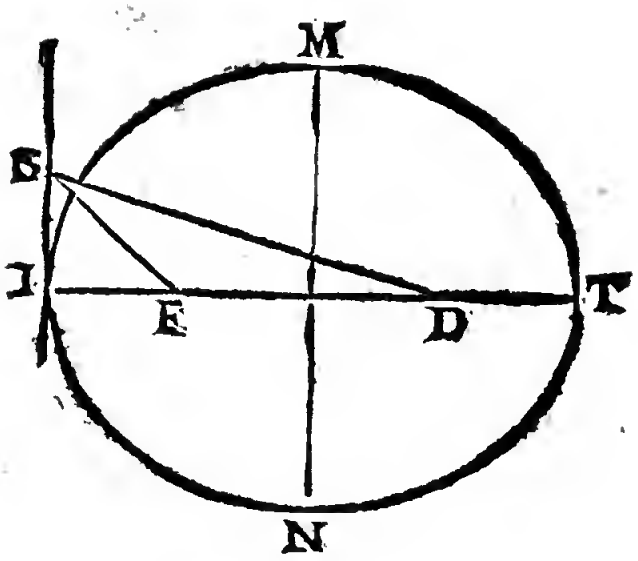



S'il étoit poſſible que CP fût plus grande que CR : ſoit fait C*p* égale à CR ; & ayant mené des foyers les lignes F*p*, D*p*, FR, DR, & FP, DP; les deux triangles CD*p*, CFR, ſeront égaux & ſemblables, & les deux triangles CDR, CF*p* le ſeront auſſi ;

car CD, CF & CR, C*p* ſont égales, & les angles oppoſez au point C ſont égaux : c'eſt pourquoy FR eſt égale à D*p*, & DR à F*p* : la ſomme de F*p*, D*p* ſera donc égale à IT, car la ſomme de FR, DR luy eſt égale *par la generation* : mais la ſomme de FP, DP eſt auſſi égale à IT : c'eſt pourquoy la ſomme de F*p*, D*p* eſt égale à la ſomme de FP, DP, ce qui eſt abſurd : la Propoſition étoit donc vraye.

## PROPOSITION VII.

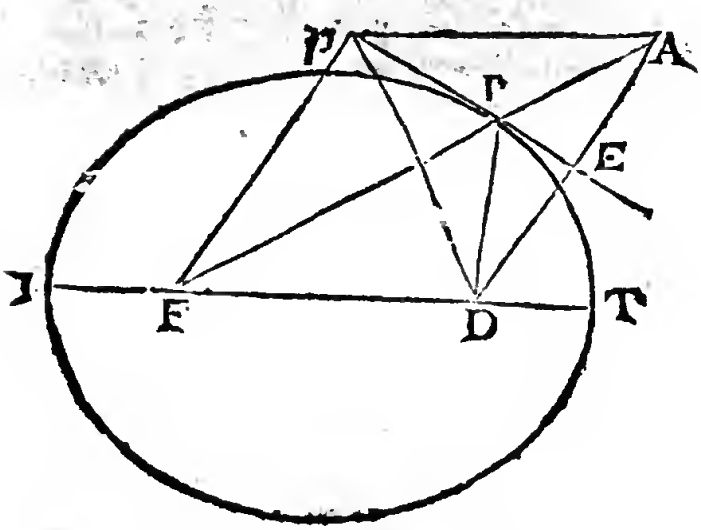
*Une ligne droite* SI *qui étant perpendiculaire au grand Axe, le rencontre en ſon extremité* I, *touche l'Ellipſe en ce même point.*




Si SI ne touche par l'Ellipſe au point I, elle la rencontrera encore en quelqu'autre point S ; & ayant mené des foyers les lignes FS, DS : *par la generation* FD, FS enſemble ſeront égales à IT ; & à cauſe du triangle rectangle FIS, FS eſt plus grande que FI, c'eſt pourquoy DS doit être plus petite que TF ou DI ſon égale, ce qui eſt abſurd : car DS ſoûtient l'angle droit I du triangle DIS ; ce qui étoit propoſé eſt donc vray.

## PROPOSITION VIII.

*Les mêmes choſes que dans la premiere Propoſ. étant poſees, ayant mené* DA *& l'ayant diviſee en deux egalement en* E. *Je dis que la ligne droite* PE *touche l'Ellipſe au point* P.

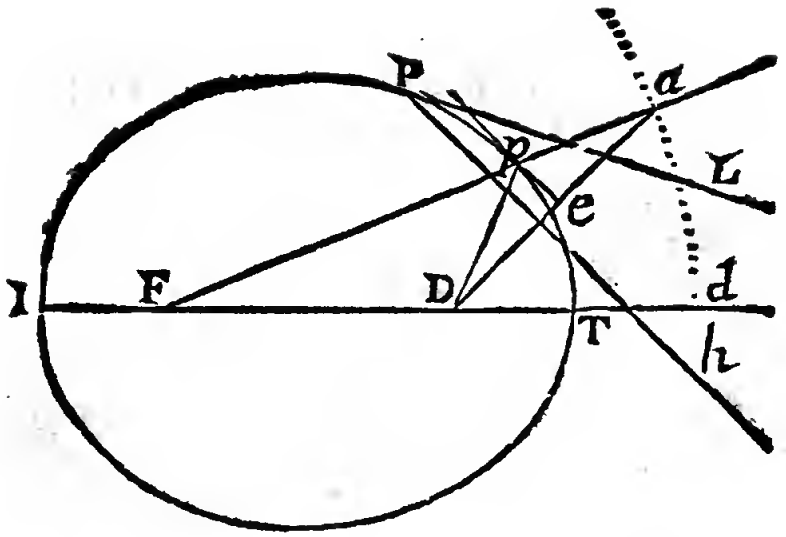



Si PE ne touche pas l'Ellipſe au point P, elle la rencontrera en quel-

qu'autre point *p*. *Par la generation* F*p*, *p*D ſeront enſemble égales à FP, PD enſemble, ce qui eſt égal à FA : mais *p* D eſt égale à *p*A, car *p*E eſt perpendiculaire à AD & la coupe en deux également ; c'eſt pourquoy F*p*, *p*A enſemble ſeront égales à FA, ce qui eſt abſurd, car les deux côtez d'un triangle F*p*A enſemble ne peuvent pas être égaux à l'autre côté FA : la ligne droite PE touchera donc l'Ellipſe en P. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION IX.

*Dans une Ellipſe* IPT, *je dis que par un point* P *l'on ne peut mener qu'une touchante* PE.




Si cela n'eſt pas, Que la ligne P *h* ſoit auſſi touchante au point P, s'il eſt poſſible. Du Foyer D ayant mené D *a* perpendiculaire à P *h*, & du centre F & demi-diametre F *d* égale à I T, ayant décrit le cercle *d a* rencontrant D *a* en *a*, & ayant diviſé D *a* en deux également en *e*, ſoit tiré F *a* qui rencontrera l'Ellipſe en quelque point *p*, ayant tiré D *p*, & *p e* qui paſſant par le point *e* qui diviſe en deux également D *a* en *e*, ſera perpendiculaire à D *a*; car D *p*

& *p a* ſont égales *par la Generation*; c'eſt pourquoy la ligne *p e* touchera l'Ellipſe au point *p par la precedente Propoſition*: mais elle eſt auſſi perpendiculaire à D *a*, c'eſt pourquoy P *h* & *p e* ſeront paralleles; & les touchantes PE, *pe* ne ſe peuvent rencontrer que dehors l'Ellipſe, & l'Ellipſe paſſe par les points P *p*; c'eſt pourquoy la ligne P *h* parallele à *p e*, rencontrera neceſſairement les lignes F*p*, D*p* qui ſont au dedans de l'Ellipſe: P *h* paſſera donc au dedans de l'Ellipſe, & elle ne ſera pas touchante comme il étoit ſuppoſé; elle ne peut pas auſſi être jointe à la touchante *p e par la precedente Propoſition*, car elle rencontreroit l'Ellipſe en deux points P *p*: on ne peut donc mener qu'une touchante par un point d'une Ellipſe.

## PROPOSITION X.

*Les mêmes choſes étant toûjours posées : Je dis que les angles* FP*p*, DPE *faits par la touchante* PE, *& par les lignes* PF, PD *menées du point touchant* P *aux Foyers, & qui ſont des deux côtez du point* P, *ſont égaux entr'eux.**

Le triangle DPA eſt Iſoſcelle, & PE coupe la baze en deux également: c'eſt pourquoy l'angle DPE eſt égal à l'angle APE : mais l'angle FP*p* eſt égal à l'angle APE : l'angle FP*p* eſt donc égal à l'angle DPE. Ce qui étoit propoſé.

### COROLLAIRE.

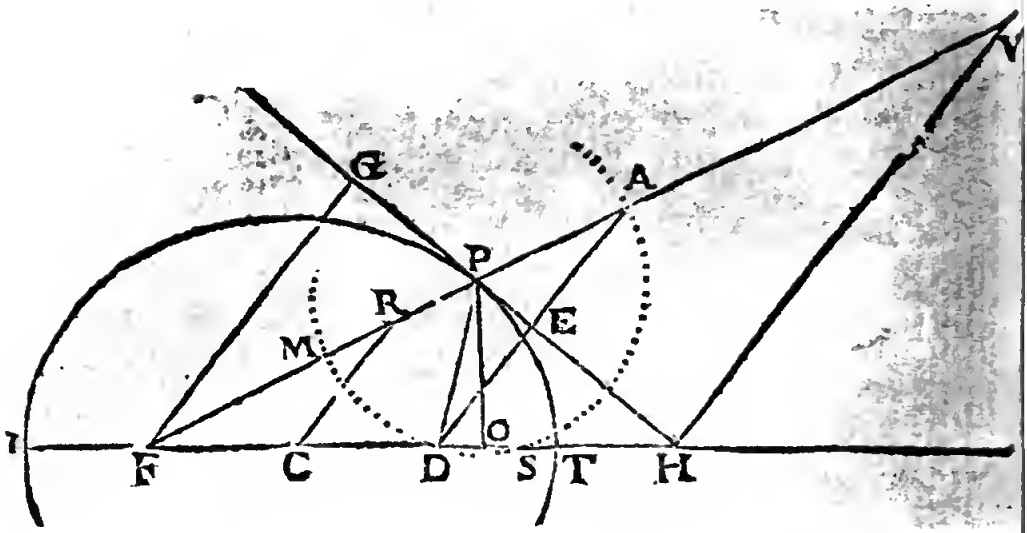
Si l'on ajoûte à ces angles égaux

* *Voyez la Figure de la page* 55.

l'angle commun FPD, il eſt évident que l'angle FPE eſt égal à l'angle DP*p*.

## PROPOSITION XI.

*Suppoſant toûjours les mêmes choſes : ſi la touchante* PE *rencontre l'Axe* IT *en* H. *Je dis que* CO *eſt à* CT, *comme* CT *à* CH.




Des points FCH ayant mené FG,

CR, HV paralleles à DA; FA ſera coupée en deux également en R: car FD l'eſt en C. A cauſe des triangles ſemblables FP eſt à PA, comme FG à AE ou ſon égale DE; & FG eſt à DE, comme FH à DH; & FH à DH, comme FV à VA; c'eſt pourquoy en raiſon égale FP eſt à PA, comme FV à VA; en diviſant FP moins PA, ce qui eſt égal à deux RP eſt à PA, comme FV moins VA ce qui eſt égal à FA eſt à VA: mais 2 RP eſt à FA, comme leurs moitiez RP à RA: c'eſt pourquoy en raiſon égale RP à PA, comme RA à VA; en compoſant RP eſt à RP plus PA, ce qui eſt égal à RA, comme RA à RA plus VA ce qui eſt égal à RV; les lignes RP, RA, RV ſont donc en proportion continuë; c'eſt pourquoy le quarré de RA eſt égal au rectangle RP, RV.

Maintenant à cauſe du cercle ASDM, *comme dans la premiere Propoſition*, qui rencontre l'Axe IT en

D & en S, ou au ſeul point O, ſi O & D ſont joints enſemble, FD ſera à FA, comme FM à FS, & leurs moitiez CD eſt à RA, comme RP à CO: mais CD eſt à RA, comme CH à RV; en raiſon égale CH à RV, comme RP à CO, & le rectangle des extrêmes de cette proportion eſt égal au rectangle des moyennes, ce qui eſt le rectangle CH, CO égal au rectangle RP, RV: mais dans l'article precedent le rectangle RP, RV vient d'être démontré égal au quarré de RA qui eſt égale à CT; car *par la Generation*, FA eſt égale à IT: c'eſt pourquoy CO eſt à CT, comme CT à CH. Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

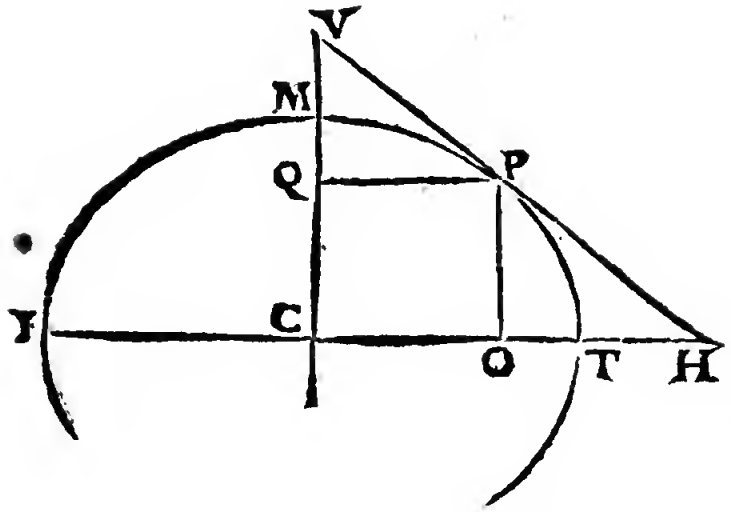
Puiſque les lignes CO, CT, CH ſont en proportion continuë, l'on démontrera en ſe ſervant de la Methode renverſée de la démonſtration du premier article de cette propoſi-

ion, que IO eſt à OT, comme IH à HT ; car ayant trouvé que FV étoit à VA comme FP à PA, l'on a démontré que les lignes RP, RA, RV étoient en proportion continuë.

La ligne IH eſt dite *diviſée par les points* O, T *en 3, parties harmoniquement.*

## PROPOSITION XII.

*Poſant toûjours les mêmes choſes. Si la touchante* PE *rencontre le petit Axe en* V, *ayant mené* PQ *qui luy ſoit Ordonnée. Je dis que* CQ *eſt à* CM, *comme* CM *à* CV.

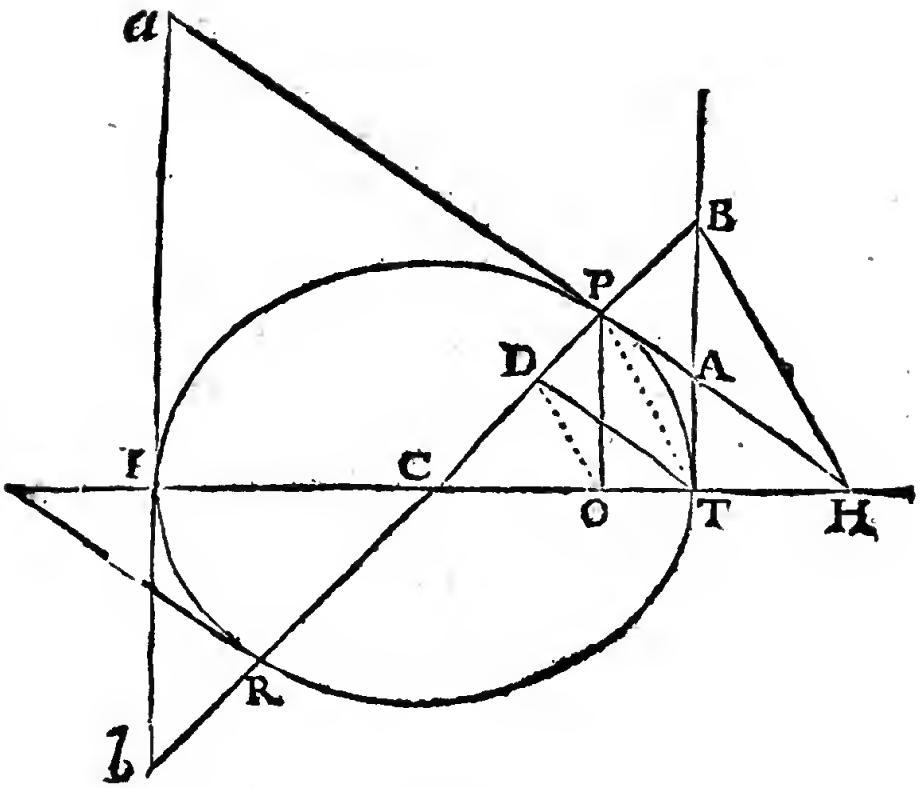



*Par la precedente Propoſition*, il eſt évident que le quarré de CO eſt au quarré de CT, comme CO eſt à CH: mais *par la 4. Propoſition* le quarré de CO ou de QP eſt au quarré de CT, comme le quarré de CM moins le quarré de CQ, (car il eſt égal au rectangle NQ, QM) au quarré de CM; & à cauſe des triangles ſemblables CO eſt à CH, comme VQ à CV: c'eſt pourquoy en raiſon égale VQ eſt à CV, comme le quarré de CM moins le quarré de CQ au quarré de

CM ; en diviſant CV eſt à CV moins CQ, ce qui eſt CQ. comme le quarré de CM au quarré de CM moins le quarré de CM plus le quarré de CQ; ce qui eſt CV à CQ. comme le quarré de CM au quarré de CQ : c'eſt pourquoy CQ eſt à CM, comme CM à CV. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XIII.

*Dans une Ellipſe* IPT *dont l'Axe eſt* IT, *& une touchante* BT *a ſon extremité* T, *& quelqu'autre touchante* PA *rencontrant la touchante* BT *en* A *& l'Axe en* H. *Si par le point touchant* P *de la touchante* PA *on mene le dinmetre* CP *qui rencontre la touchante* TB *en* B. *Je dis que les triangles* PAB, TAH *ſont égaux.*




Du point T ayant mené TD parallele à la touchante PH, & l'Ordonnée PO à l'Axe; à cauſe des paralleles CD ſera à CP, comme CT à CH: mais *par la* 11. *Propoſition*, CT eſt à CH, comme CO à CT, & à cauſe des paralleles CO eſt à CT, comme CP à CB; c'eſt pourquoy en raiſon égale CD eſt à CP, comme

P à CB ; & pour la même raiſon
D eſt à CP, comme CO à CT,
mblablement CP à CB comme CT
CH ; les lignes droites DO, PT,
H ſeront donc paralleles entr'elles,
: les triangles PTB, PTH qui ont
ı baſe commune ſur l'une de ces pa-
alleles & leurs ſommets dans une
utre, ſeront égaux entr'eux, deſ-
quels ſi l'on ôte le triangle commun
PAT, les reſtes PAB, TAH ſeront
égaux. Ce qui étoit propoſé.

## COROLLAIRE I.

Il eſt évident par la même raiſon, que les triangles PDT, POT ſont auſſi égaux entr'eux, & ſi on leur ajoûte les triangles égaux PTB, PTH le quadrilatere POTB ſera égal au quadrilatere PDTH, ou bien en ajoûtant les mêmes triangles égaux au ſeul triangle POT ou au ſeul triangle PDT, on aura le quadrilatere POTB égal au triangle POH,

ou bien le quadrilatere PDTH égal au triangle DTB. On voit auſſi par la même raiſon que le triangle CTB eſt égal au triangle CPH.

## COROLLAIRE 2.

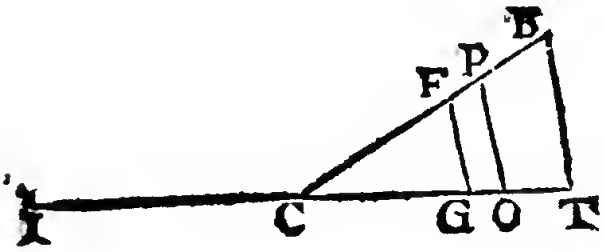
Ayant mené la touchante I*b*; il eſt évident que les triangles P*a b*, I*a*H ſont égaux entr'eux ; car I*b* eſt parallele à BT, c'eſt pourquoy les triangles CI*b*, CTB ſont ſemblables, & le côté CI de l'un étant égal au côté homologue CT de l'autre, ils ſeront égaux; le triangle CI*b* ſera donc égal au triangle CPH qui eſt égal au triangle CTB, & ſi à ces triangles égaux l'on ajoûte le commun quadrilatere ICP*a*, les triangles P*a b*, I*a*H ſeront égaux : mais il eſt encore évident que tout ce qui a été démontré dans les triangles faits entre CT & CP, ſe démontrera de même entre CI & CR : car la touchante en R doit être parallele à PH touchante en P, car le

riangle CPH eſt égal au triangle
TB qui eſt égal au triangle CI*b*.
t ſuppoſons que la touchante en R
encontre l'Axe en *h* ( *ce qui n'eſt*
*oint dans la Figure* ) on démontrera
e même que cy-devant que le trian-
le CI*b* eſt égal au triangle CR*h*,
'eſt pourquoy en raiſon égale le
riangle CR*h* eſt égal au triangle
PH : mais dans ces triangles égaux
'angle RCI eſt égal à l'angle PCH,
x l'un des côtez CR qui le compren-
ent eſt égal au côté CP de l'autre,
*ar la 6. Propoſition.* C'eſt pourquoy
es triangles ſont ſemblables , mais
oſez ſous-contrairement ; R*h* eſt
onc parallele à PH qui en ſont les
ôtez homologues.

## LEMME.

*Soit un triangle* CTB *dont le côté* CT *étant prolongé en* I *ſoit* CI *égale à* CT ; *par quels points on voudra* O, G *du coſté* CT *ſoient menées les lignes*

OP, GF *paralleles à* TB. *Je dis que le rectangle* IO, OT *eſt au rectangle* IG, GT, *comme le quadrilatere* OTBP *au quadrilatere* GTBF.

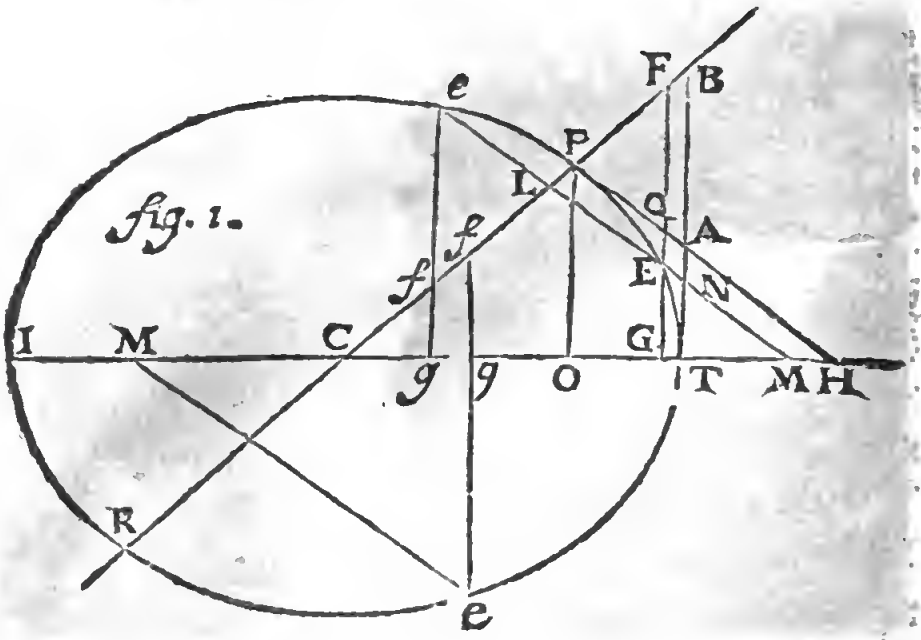



Le quarré de CT eſt au quarré de CO, comme le triangle CTB au triangle COP, & diviſant le quarré de CT moins le quarré CO eſt au quarré de CT, comme le triangle CTB moins le triangle COP au triangle CTB: de même le quarré de CT eſt au quarré de CG, comme le triangle CTB au triangle CGF; & diviſant le quarré de CT eſt au quarré de CT moins le quarré de CG, comme le triangle CTB au triangle

CTB moins le triangle CGF; c'eſt pourquoy en raiſon égale le quarré de CT moins le quarré de CO, eſt au quarré de CT moins le quarré de CG, comme le triangle CTB moins le triangle COP (ce qui eſt le quadrilatere OTBP) au triangle CTB moins le triangle CGF (ce qui eſt le quadrilatere GTBF): mais le quarré de CT moins le quarré de CO eſt égal au rectangle IO, OT; & ſemblablement le quarré de CT moins le quarré de CG eſt égal au rectangle IG, GT à cauſe que le point C diviſe IT en deux également: c'eſt pourquoy le rectangle IO, OT eſt au rectangle IG, GT, comme le quadrilatere OTBP au quadrilatere GTBF. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XIV.

*Les mêmes choſes étant posées comme dans la precedente : Si de quelque point* E *de l'Ellipſe on mene* LEM *parallele à la touchante* PH, *&* FEG *parallele à la touchante* BT ; *Je dis que le triangle* EGM *eſt égal au quadrilatere* GTBF.



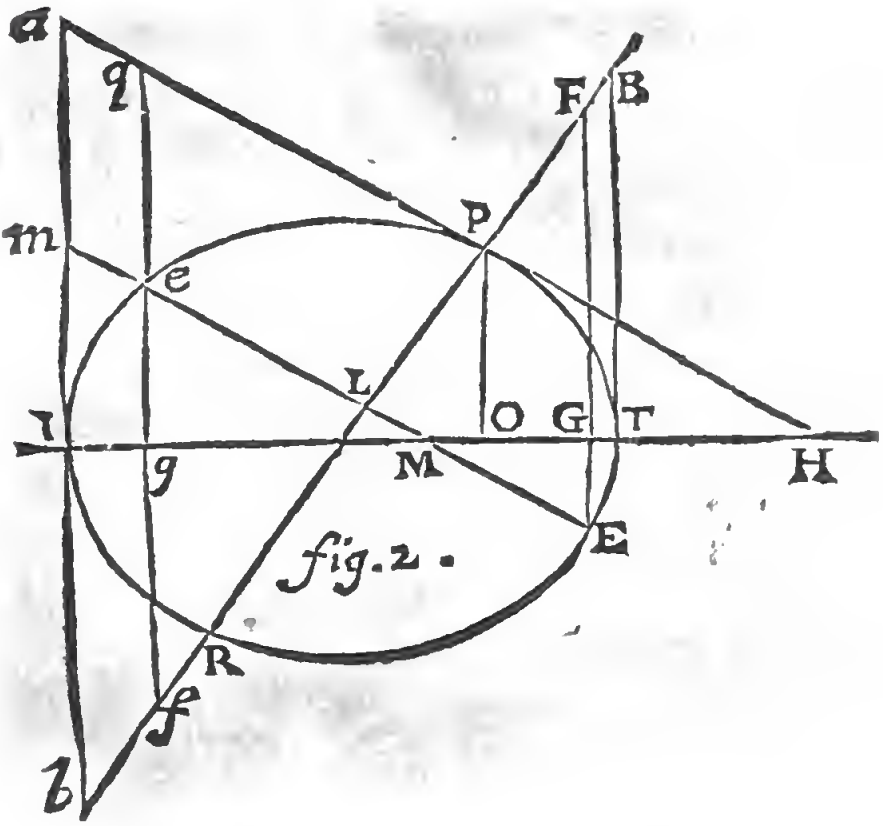



fig. 2.

A cauſe des paralleles le triangle POH eſt au triangle EGM, comme le quarré de PO au quarré de EG: mais *par la 3. prop.* il eſt évident que le quarré de PO eſt au quarré de EG, comme le rectangle IO, OT, au rectangle IG, GT; & à cauſe que IT eſt coupée en deux également en C, *par le Lemme precedent*, le rectangle IO,

point E eſt comme en *e*, le triangle *e g* M ſera égal au quadrilatere *g* T B *f*, car *e g* eſt ſuppoſée ordonnée à l'axe.

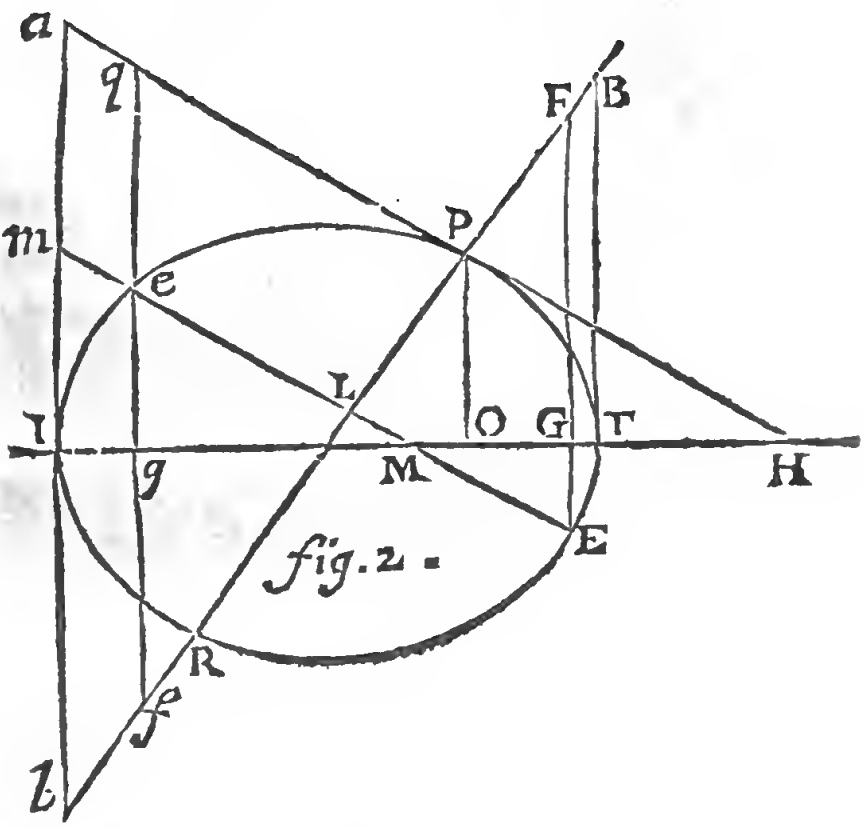


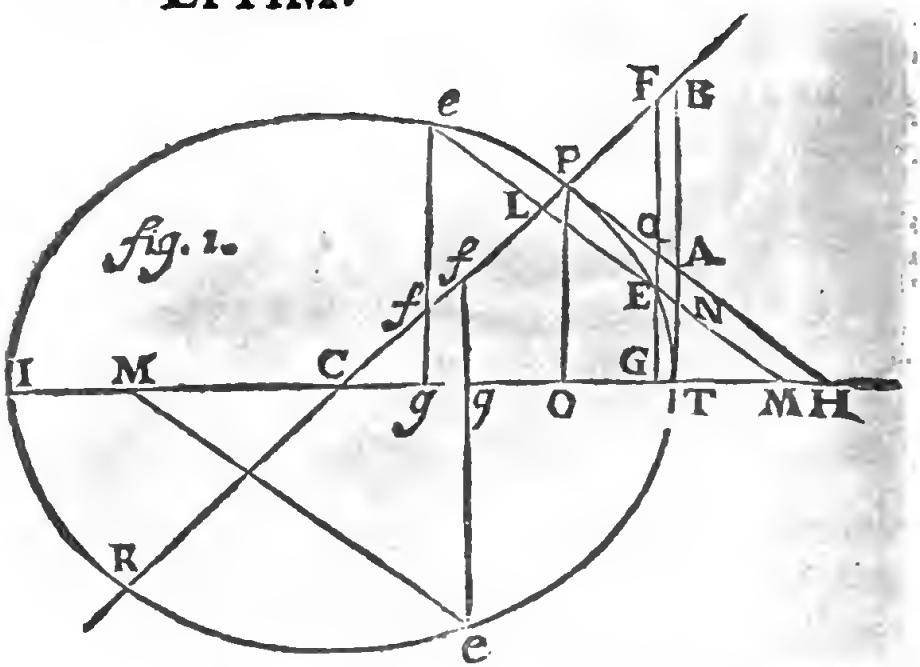

fig. 2.

Et ſi le point *g* coupe l'axe dans la partie CI, on démontrera de même que le triangle *e g* M eſt égal au quadrilatere *g* I *b f*; car la même démonſtration ſert par tout, en conſiderant ſeulement ce qui a eſté dit dans le 2.

Corollaire de la precedente Propoſition.

## PROPOSITION XV.

*Les meſmes choſes étant posées. Je dis que le triangle* ELF, *ou bien* eLf, *eſt égal au quadrilatere* LPHM.




*Par le Coroll.* 1. *de la* 13. *prop.* le triangle CTB eſt égal au triangle

CPH, & de ces égaux ôtant le commun quadrilatere CGEL, & ôtant encore du premier le quadrilatere GTBF, & du ſecond le triangle EGM égal à ce quadrilatere *par la precedente propoſ.* il reſtera le triangle ELF égal au quadrilatere LPHM. Ce qui étoit propoſé.

* Si le point E eſt au delà de T à l'égard de P, & que le point L tombe toûjours ſur CP ; des triangles égaux CTB, CPH ôtant le commun CML, & du premier reſte ôtant le quadrilatere GTBF, & ajoûtant ſon égal le triangle EGM, on aura le triangle ELF égal au quadrilatere LPHM. Ce qui étoit propoſé.

* Mais ſi le point E eſt en *e* au delà de P à l'égard de T, & que l'Ordonnée *eg* tombe ſur CT ; *par la precedente propoſ.* le triangle *egM* eſt égal au quadrilatere *g*TB*f*, & ſi de ces

* *Figure 2. precedente.* * *Figure 1. precedente.*

égaux on ôte la commune figure *f g* GEL, & ſi l'on ôte encore du premier le triangle EGM, & du ſecond le quadrilatere GTBF égal à ce triangle, il reſtera le triangle *e f* L égal au triangle EFL : mais ce triangle EFL a eſté démontré cy-deſſus égal au quadrilatere LPHM ; c'eſt pourquoy le triangle *e f* L eſt égal au quadrilatere LPHM. Ce qui étoit propoſé.

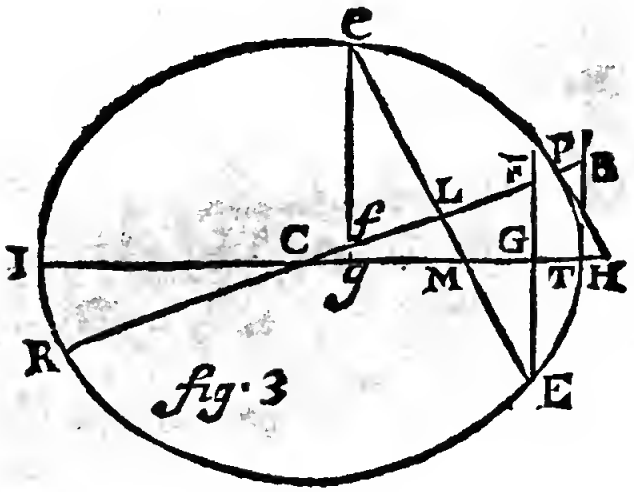


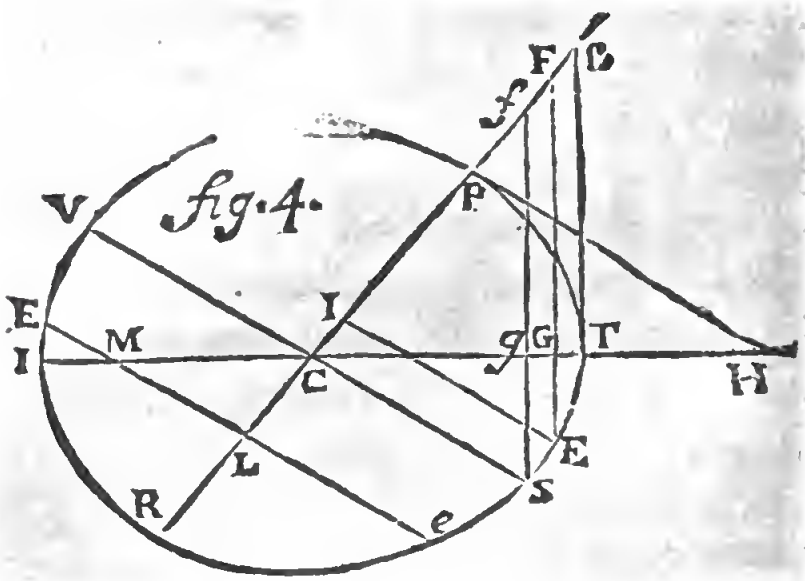
fig. 3

Mais ſi dans le cas precedent le point M tombe ſur l'axe entre le centre C & ſon extremité T ; le triangle

*eg*M étant égal au quadrilatere *g*TB*f*, ſi de ces égaux on ôte le commun quadrilatere *fg*ML, il reſtera le triangle *e*L*f* égal au quadrilatere LMTB, duquel ſi l'on ôte le quadrilatere GTBF, & qu'on luy ajoûte le triangle EGM ſon égal, on aura le triangle ELF égal au quadrilatere *g*TB*f*, & par conſequent le triangle *e*L*f* eſt égal au triangle ELF qui eſt égal au quadrilatere LPHM, comme il a eſté démontré cy-deſſus. Ce qui étoit propoſé.

* Enfin ſi le point *g* tombe ſur CI, *par le Coroll. 2. de la 12. prop.* le triangle *a*P*b* eſt égal au triangle *a*IH, & ſi de ces égaux on ôte la commune figure *a*PL*eg*I*a*, & encore du premier le quadrilatere *g*I*bf*, & du ſecond ſon égal le triangle *eg*M *par la precedente propoſition*, il reſtera le triangle *e*L*f* égal au quadrilatere LPHM. Ce qui étoit propoſé.

* *Figure 2. precedente.*




Pour tous les autres cas, & où le point L tombe ſur CR, ce ſera la même démonſtration, comme il ſera facile à connoître, ſi l'on conſidere ce qui a eſté dit dans le 2. Corollaire de la 12. propoſ. & ſi le point L tomboit en C, le point E ſeroit en S ou en V, (la ligne VCS ayant eſté menée parallele à PH) & pour lors le triangle C*f*S ſeroit égal au triangle CPH, & il me ſemble que cecy eſt plus que ſuffiſant pour la démonſtration de cette Propoſition.

# PROPOSITION XVI.

*Dans une Ellipſe* IPT *dont l'axe eſt* IT ; *toutes les lignes droites comme* Ee *paralleles à une touchante* PH, *qui rencontre l'axe en* H, *ſont coupées en deux également en* L *par le diametre* RCL *mené par le point touchant* P.

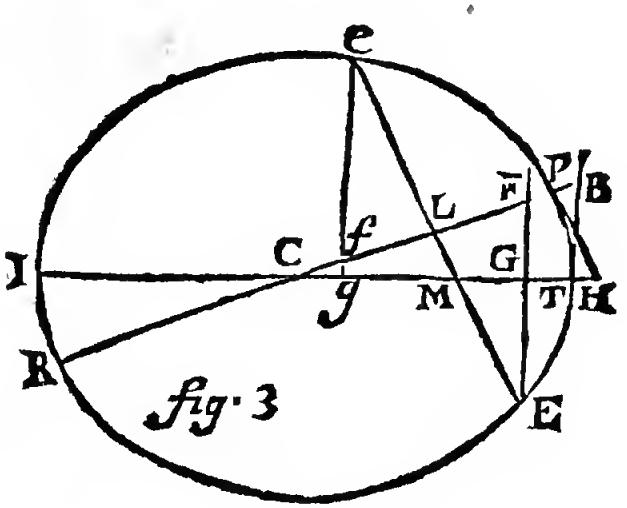


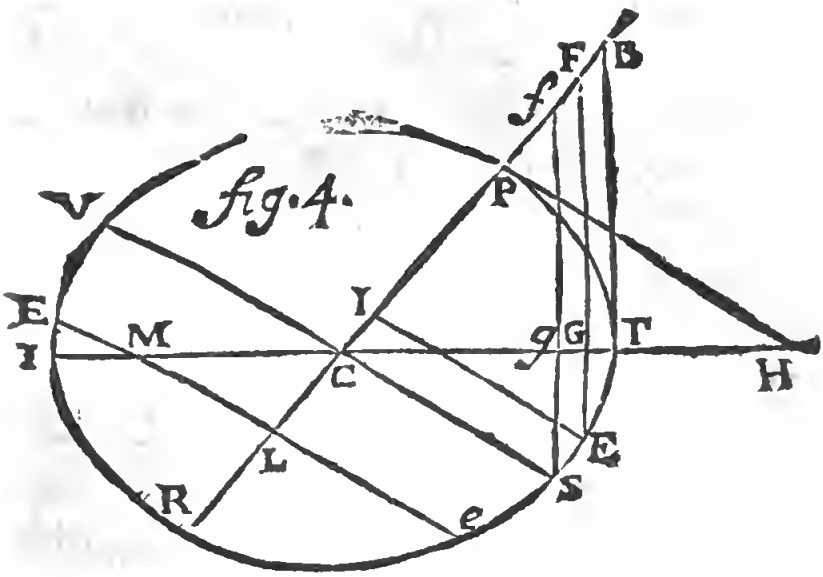

*fig.* 3

* Ayant posé toutes choses comme dans la precedente proposition, il est évident *par la mesme prop.* que les triangles ELF, *e* L*f* sont égaux entr'eux; car chacun d'eux est égal au quadrilatere LPHM: & ces mêmes triangles sont aussi semblables à cause des paralleles qui les composent, c'est pourquoy EL est égale à *e* L. Ce qui étoit proposé.

* *Figures 2. & 3. precedentes.*

## PROPOSITION XVII.

*Les mesmes choses estant posées, si l'on mene le diametre* VCS *parallele à la touchante* PH. *Je dis que le quarré du diametre* VS *est au quarré du diametre* RP, *comme le quarré de* EL *au rectangle* RL, LP.



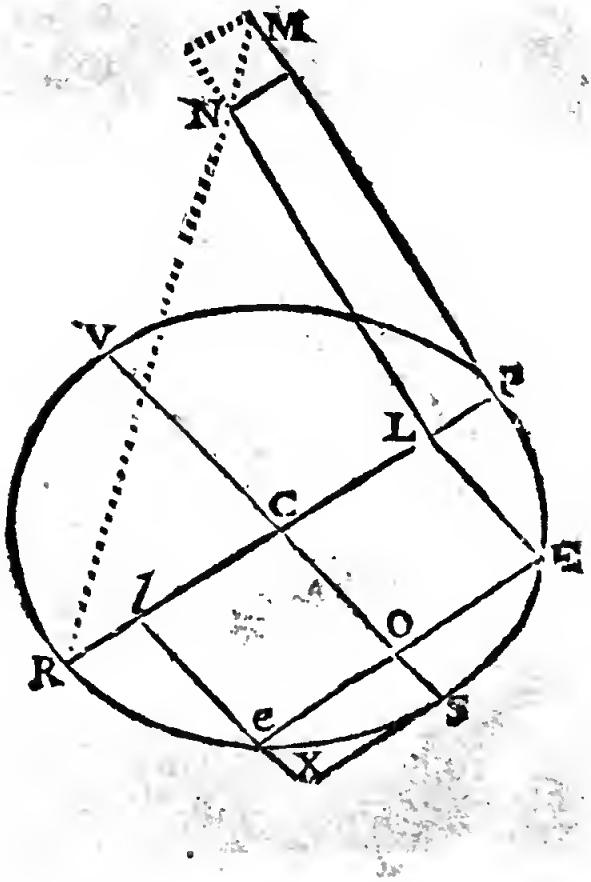

*Par la* 14. *propoſ.* le triangle CS*f* eſt égal au triangle CPH ; & le triangle LEF eſt égal au quadrilatere LPHM ; & ces triangles CS*f*, LEF ſont ſemblables : c'eſt pourquoy ils ſont l'un à l'autre, comme le quarré de CS au quarré de LE ; le quarré de CS ſera donc au quarré de LE, comme le triangle CPH au quadrilatere LPHM : mais à cauſe que RP eſt coupée en deux également en C, le triangle CPH eſt au quadrilatere LPHM, comme le quarré de CP au rectangle

RL, LP, *par le Lemme de la* 14. *prop.* c'eſt pourquoy le quarré de CS eſt au quarré de LE, comme le quarré de CP au rectangle RL, LP ; ou bien le quarré de CS au quarré de CP, ou leurs quadruples le quarré de VS au quarré de RP, comme le quarré de LE au rectangle RL, LP.

Si le point E étoit en *e*, & que le point L tombât ſur CR, prolongeant *e* L juſques en E, on démontrera de même que le quarré de LE eſt au rectangle RL, LP, comme le quarré de VS au quarré de RP : mais *par la precedente propoſ.* *e* L eſt égale à EL ; c'eſt pourquoy la propoſition eſt vraye en tous les cas.

# PROPOSITION XVIII.

*Suppoſant toûjours la même choſe. Si l'on mene la ligne droite* Ee *parallele au diametre* RP. *Je dis que* Ee *eſt coupée en deux également en* O *par le diametre* VS, *& que le quarré du diametre* PR *eſt au quarré du diametre* VS, *comme le quarré de* EO *au rect.* VO,OS.



Ayant mené EL & *el* paralleles à VS *par la precedente propoſ.* le quarré de EL eſt au rectangle RL, LP, comme le quarré de *el* au rectangle R*l*, *l*P ; mais EL & *el* ſont égales ; c'eſt pourquoy le rectangle RL, LP eſt égal au rectangle R*l*, *l*P, & par conſequent les lignes CL, C*l* ſont égales, & leurs égales auſſi EO, *e*O. Ce qui étoit premierement propoſé.

Secondement *par la precedente propoſition*, le quarré de CP eſt au quarré de CS, comme le quarré de CP moins le quarré de CL ( ce qui eſt égal au rectangle RL, LP ) au quarré de LE ; en diviſant, le quarré de CP eſt au quarré de CP moins le rectangle RL, LP ( ce qui eſt égal au quarré de CL ou de EO ſon égale ) comme le quarré de CS au quarré de CS moins le quarré de LE ou de CO ſon égale ( ce qui eſt égal au rectangle VO, OS ) le quarré de CP ſera donc au quarré de CS, ou bien leurs quadruples le quarré de R[illegible] au quar-

ré de VS, comme le quarré de OE au rectangle VO, OS. Ce qui étoit enfin proposé.

## COROLLAIRE.

Il est évident que la ligne SX parallele à OE, & menée par l'extrêmité S du diametre VS, touche l'Ellipse au point S; ce qui est la converse des propositions precedentes.

## DEFINITIONS.

1.

Les diametres RP, VS, qui ont les proprietez démontrées dans les deux precedentes Propositions, sont appellez Conjuguez l'un à l'autre.

2.

La ligne droite EL parallele à l'un d'eux VS, est appellée Ordonnée à l'autre RP, & reciproquement EO ordonnée à VS.

3.

Si l'on fait comme PR à VS, ainsi VS à PM, cette troisiéme propor-

tionnelle PM eſt appellée PARAMETRE du diametre RP ; & de même pour le diametre VS : d'où l'on connoît que deux diametres conjuguez ſont moyens proportionnels entre leurs parametres.

4.

Le rectangle compris par un diametre RP & par ſon parametre PM, comme RM eſt appellé FIGURE de ce diametre RP.

## PROPOSITION XIX.

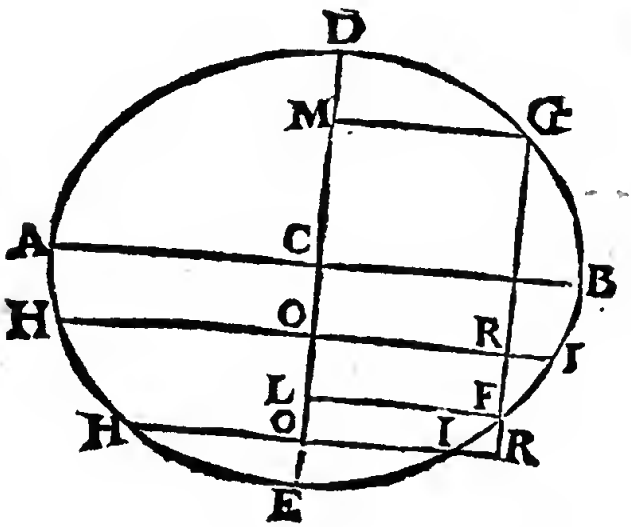
*Le quarré d'une ordonnée* EL *a un diametre* RP *eſt égal au rectangle* PN *appliqué au parametre de ce diametre, ayant pour hauteur la partie* PL *de ce diametre compriſe entre ſon extremité* P *& l'ordonnée* EL, *lequel rectangle* PN *eſt défaillant d'un rectangle* NM *ſemblable & ſemblablement poſé à la figure* RM.

* *Par l'une des deux propoſitions precedentes*, le quarré de RP eſt au quarré de VS, comme le rectangle RL, LP au quarré de LE : mais le quarré de RP eſt au quarré de VS comme RP à PM, & RP à PM, comme RL à LN : mais le rectangle RL, LP eſt au rectangle NL, LP, comme RL à NL; c'eſt pourquoy le rectangle RL, LP eſt au quarré de LE, comme le même rectangle RL, LP au rectangle PN: le quarré de EL eſt donc égal au rectangle PN. Ce qui étoit propoſé.

* *Figure precedente.*

## PROPOSITION XX.

*Si dans une Ellipſe* ADBE *deux lignes droites* HI, FG *eſtant paralleles à deux diametres conjuguez* AB, DE *ſe rencontrent en un point* R *dedans ou dehors l'Ellipſe. Je dis que le rectangle* HR, RI, *eſt au rectangle* FR, RG, *comme le quarré de* AB *au quarré de* DE.



Ayant mené FL & GM ordonnées au diametre ED, elles ſeront paralleles à AB *par la 16. ou 17. propoſition*; & *par les meſmes* le quarré de LF eſt au quarré de OI, comme le rectangle EL, LD au rectangle EO, OD; & ſi le point R eſt dehors l'Ellipſe; diviſant, le quarré de LE moins le quarré de OI (ce qui eſt égal au rectangle HR, RI) eſt au quarré de OI, comme le rectangle EL, LD moins le rectangle EO, OD (ce qui eſt égal au rectangle LO, OM, ou bien au rectangle FR, RG) eſt au rectangle EO, OD: mais ſi le point R eſt au dedans de l'Ellipſe; diviſant, le quarré de OI moins le quarré de LE ou de OR (ce qui eſt égal au rectangle HR, RI) eſt au quarré de OI, comme le rectangle EO, OD moins le rectangle EL, LD (ce qui eſt égal au rectangle LO, OM, ou bien au rectangle FR, RG) eſt au rectangle EO OD: mais *par les meſmes propoſ. 16. ou 17.* le quarré de OI eſt au

rectangle EO, OD, comme le quarré de AD au quarré de ED ; c'eſt pourquoy le rectangle HR, RI eſt au rectangle FR, RG, comme le quarré de AB au quarré de ED. Ce qui étoit propoſé.

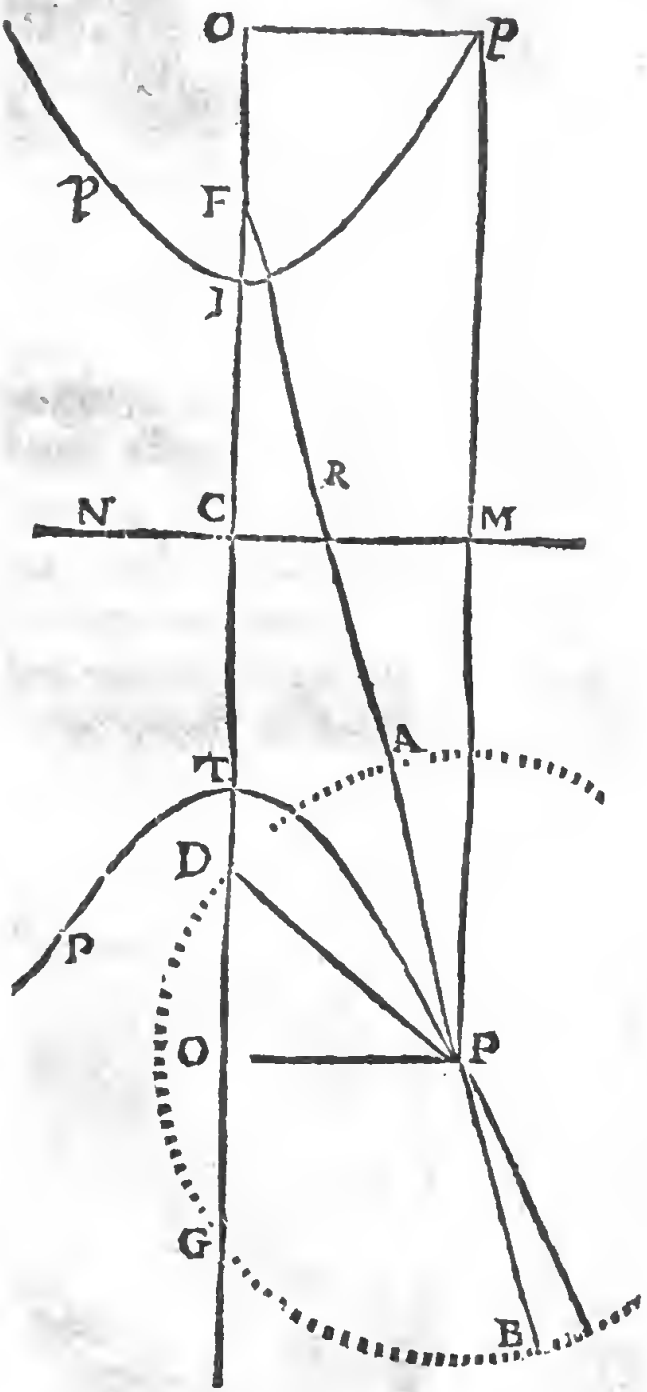
# L'HYPERBOLE.

## GENERATION DE L'HYPERBOLE.

*SI il y a sur un plan une ligne droite* IT *que le point* C *coupe en deux également; & les points* F, D *sur la même ligne prolongée des deux costez, & également éloignez du point* C. *Je dis que l'on peut trouver autant de points que l'on voudra, comme* P *ou* p, *en sorte que la ligne droite* PF *sur-*

*paſſe toûjours* PD *de la grandeur de* IT, *ou bien que* pD *ſurpaſſe toujours* pF *de la meſme grandeur de* IT.

Si l'on prend FP de quelle grandeur on voudra, pourveu qu'elle ne ſoit pas plus petite que FT, la difference entre FP & IT ſera DP plus grande ou tout au moins égale à DT: c'eſt pourquoy ſi le point F eſt le centre d'un cercle dont le demi-diametre ſoit FP, & ſi le point D eſt le centre d'un autre cercle dont le demi-diametre ſoit DP, ces deux cercles s'entrecouperont neceſſairement en deux points, comme P, un de chaque côté de la ligne IT, ou tout au moins ils ſe toucheront au point T, & l'on trouvera autant de differens points P, que l'on prendra de differentes lignes FP; l'on peut trouver de même autant de points *p* que l'on voudra.


O
P
P
F
I
R
N
C
M
A
T
D
P
O
P
G
B

## COROLLAIRE.

Il eſt évident *par cette Generation*, que la ligne droite qui joint les deux points P ou *p*. qui ſont les rencontres des deux meſmes cercles, ſera perpendiculaire à FD, & ſera coupée en deux également par la même ligne FD. Il eſt encore évident que les points P formeront une ligne qui paſſera en T, & les points *p* une autre qui paſſera en I ; de plus on voit auſſi que les lignes PTP & *p*I*p* n'enferment point un eſpace ny toutes deux enſemble ny chacune en particulier, & qu'elles s'augmentent à l'infiny en s'éloignant toûjours de la ligne droite IT, & du point C, l'une d'un coſté, l'autre de l'autre.

## DEFINITIONS.

I.

Les lignes PTP, *p*I*p*, ſont appellées chacune ſeparément HYPERBOLE,

BOLE, & toutes deux enſemble HYPERBOLES OPPOSE'ES.

2.

Le point C, CENTRE de l'hyperbole, ou des hyperboles oppoſées.

3.

La ligne droite IT, l'AXE DETERMINE'.

4.

La ligne droite NCM qui paſſant par le centre C, eſt perpendiculaire à IT, l'AXE INDETERMINE'.

5.

Les points F, D, les FOYERS.

6.

Les lignes droites, comme PO, menées des points d'une hyperbole ou des hyperboles oppoſées perpendiculairement à l'un des axes, ſont appellées ORDONNE'ES à cet axe.

7.

Toutes les lignes droites qui paſſent par le Centre, ſont appellées DIAMETRES, ceux qui rencontrent les hyperboles ſont DETERMINEZ,

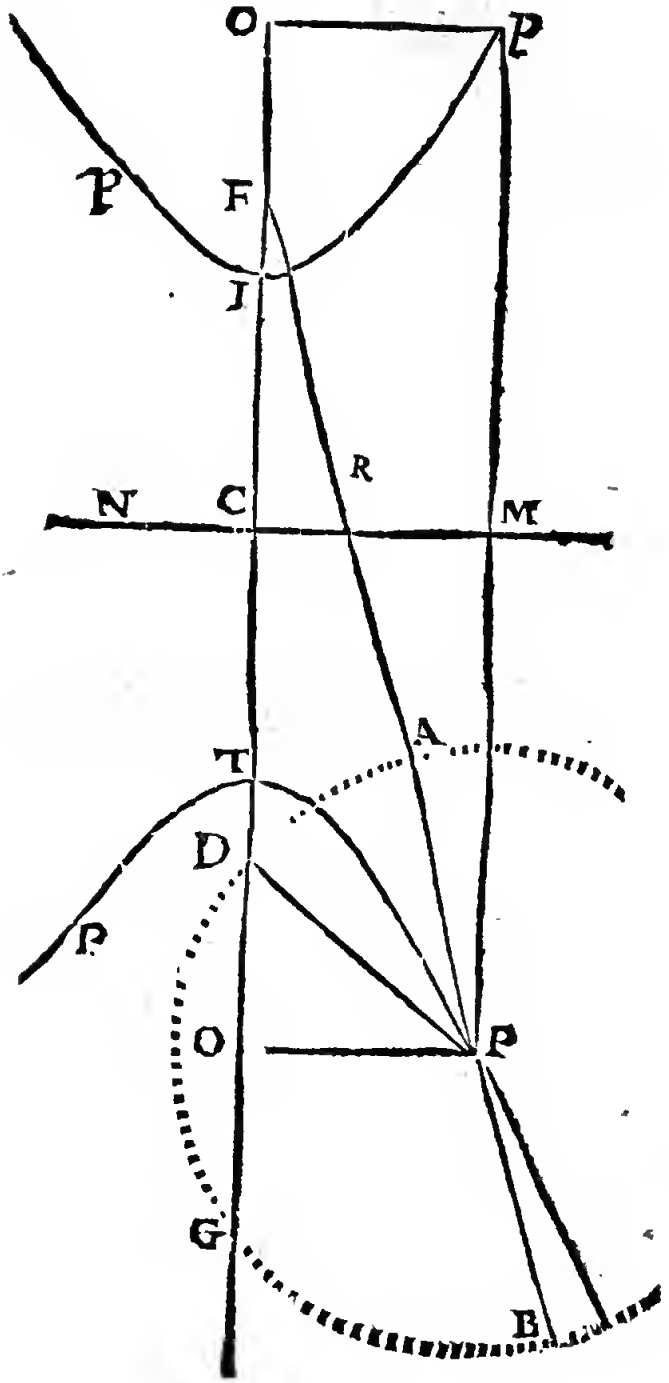
& les autres INDETERMINEZ.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre l'hyperbole qu'en un point, & qui ne passe pas par-dedans, est appellée TOUCHANTE en ce point là.

## PROPOSITION I.

*L'Hyperbole estant formée. Je dis que le quarré d'une Ordonnée* PO *à l'Axe déterminé* IT, *est au rectangle* IO, OT *des parties de cet Axe prises entre la rencontre* O *de l'Ordonnée, & les extremitez* IT *de cet Axe non prolongé, comme le rectangle* IF, FT, *ou* TD, DI *qui leur sont egales, au rectangle* IC, CT *qui est le quarré de* CT.


O
P
P
F
I
R
N
C
M
A
T
D
P
O
P
G
B

Ayant tiré FP prolongée en B, en ſorte que PB ſoit égale à PD ; du point P pour centre & demi-diametre PD, ſoit décrit le cercle BGD coupant FP en A, & IT en D & G; FA ſera égale à IT *par la Generation*, laquelle ſoit diviſée en deux également en R. A cauſe du cercle ADGB le rectangle FA, FB eſt égal au rectangle FD, FG : c'eſt pourquoy FA eſt à FD, comme FG à FB, & leurs moitiez FR, ou CT ſon égale, eſt à CD, comme CO à RP ; & compoſant CT eſt à CT plus CD, comme CO à CO plus RP, ou bien CT eſt à CO, comme CT plus CD à CO plus RP ; & compoſant encore CT eſt à CT plus CO (ce qui eſt égal à IO) comme CT plus CD (ce qui eſt égal à ID) à CT plus CD plus CO plus RP, mais CT plus CD plus CO plus RP, ou leurs égales FR, FC, CO, RP ſont enſemble égales à la ſomme de FP, FO: c'eſt pourquoy CT à IO, comme ID à FP, FO enſemble.

De même reprenant la proportion cy-deſſus, CT à CD, comme CO à RP ; en diviſant CT à CD moins CT, comme CO à RP moins CO; & CT à CO, comme CD moins CT à CO moins RP ; mais diviſant encore CT à CO moins CT, (ce qui eſt égal à OT) comme CD moins CT (ce qui eſt égal à DT) à RP moins CO moins CD plus CT ; mais RP moins CO moins CD plus CT, ou leurs égales RP moins CO moins FC plus FR ſont enſemble égales à la difference de FP, FO : c'eſt pourquoy CT à OT, comme DT à FP moins FO.

Si l'on fait donc des rectangles avec les grandeurs des dernieres proportions des deux articles precedens priſes par ordre, on aura le quarré de CT au rectangle IO, OT, comme le rectangle ID, DT, au rectangle de la ſomme FP, FO & de la difference des meſmes, lequel rectangle eſt égal au quarré de PO, *par le Lemme prece-*

*dent la premiere propoſition de l'Ellipſe.* Ce qu'il falloit démontrer.

Si le cercle BDA touche IT en D, ou bien ſi le point O tombe au point D, ce qui eſt la meſme choſe, la démonſtration ſera la meſme, mais plus ſimple, car pluſieurs quantitez qui étoient differentes, deviennent égales.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que les quarrez des Ordonnées à l'axe ſont entr'eux, comme les rectangles faits des parties de cet Axe priſes entre ſes extrêmitez & les rencontres des meſmes Ordonnées.

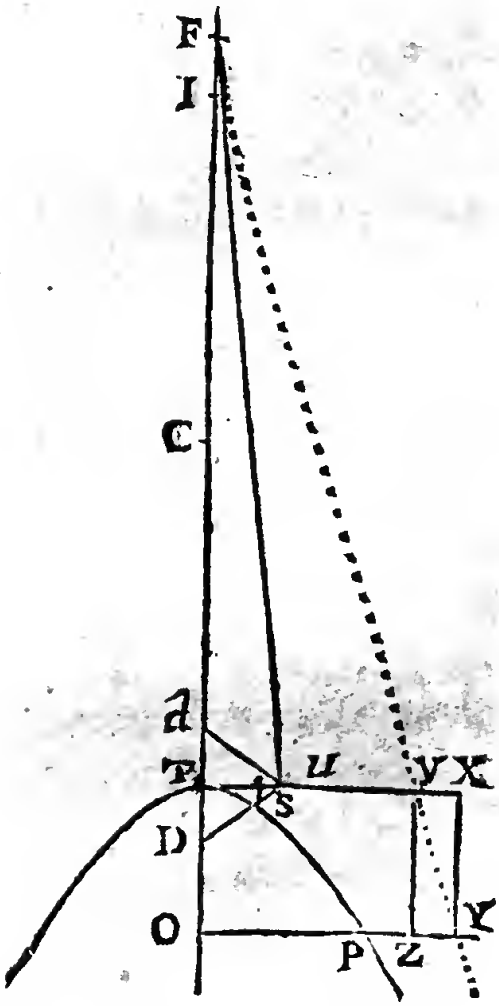
## PROPOSITION II.

*La ligne droite* Pp *menée entre les hyperboles oppoſées parallele à l'axe determiné, rencontre l'axe indeterminé* NM *en un point* M *qui la coupe en deux egalement.* *

Cette propoſition eſt aſſez évidente *par la Generation*; car ſi l'on prend le point D pour le centre du cercle dont FP eſt le demi-diametre, & le point F pour le centre de celuy dont DP eſt le demi-diametre, ces deux cercles s'entrecouperont au point *p*, en ſorte que *p o* étant ordonnée à l'axe IT, elle ſera égale à PO, & *p* M ſera auſſi égale à PM.

* *Voyez la precedente Figure.*

## DEFINITION.




Si l'on fait comme le quarré de CT au rectangle ID, DT, ainſi la ligne CT a la ligne T *u*; la ligne TV

double de T*u* est appellée PARAMETRE de l'axe déterminé.

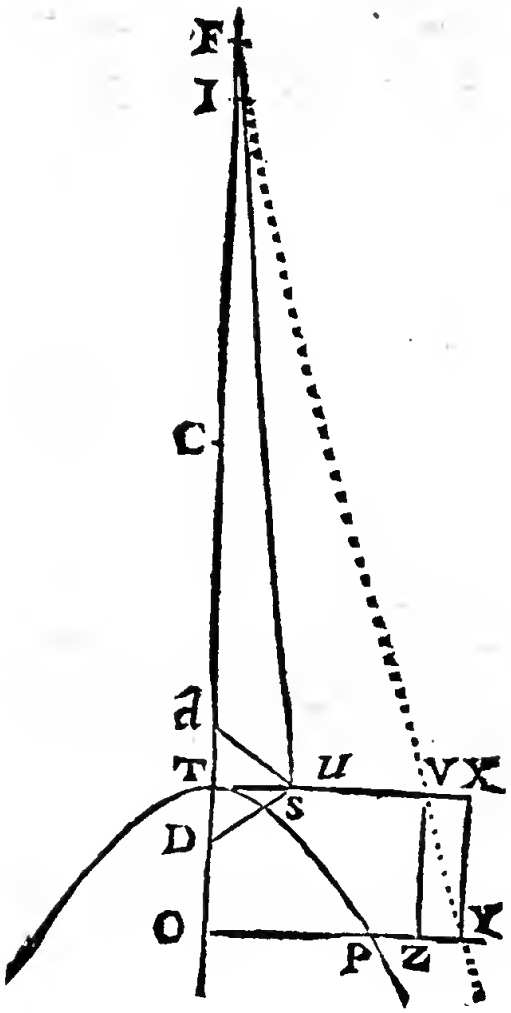
Et le rectangle I V fait de cet Axe & de son Parametre, est appellé la FIGURE de cet Axe.

## COROLLAIRE.

Il est évident que la figure IV est égale à quatre fois le rectangle I D, D T; & que I T est à T V, comme le quarré de I T à quatre rectangles I D, D T.

## PROPOSITION III.

*Le quarré d'une Ordonnée* PO *à l'Axe determiné* IT, *eſt egal au rectangle* OTXY *appliqué au Parametre* TV, *ayant pour hauteur la partie* TO *de cet Axe, priſe entre ſon extremité* T *& la rencontre* O *de l'Ordonnee, lequel rectangle eſt excedent d'un rectangle* YXVZ *ſemblable & ſemblablement poſé à la figure.*

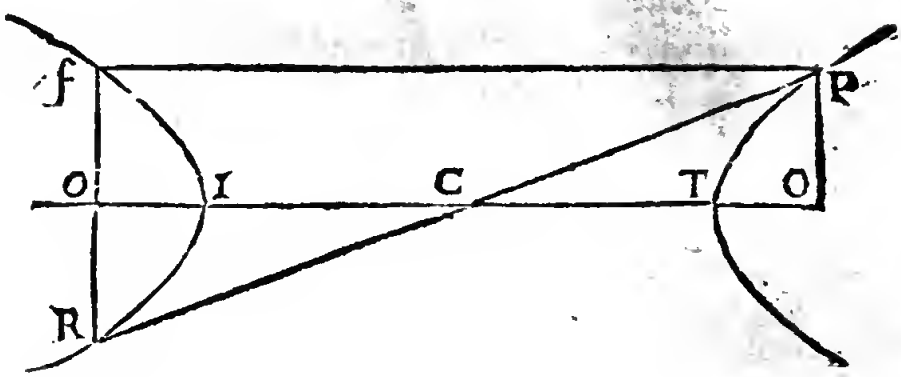



Les mêmes choſes étant poſées comme cy-devant ; *par la* 1. *propoſ* le quarré de CT eſt au rectangle ID, DT, comme le rectangle IO, OT au quarré de PO : mais *par la definition*

*de la figure*, le quarré de CT eſt au rectangle ID, DT, comme le quarré de IT à la figure, ou comme IT à TV; & en raiſon égale IT eſt à TV, comme le rectangle IO, OT au quarré de PO : mais le rectangle IO, OT eſt au rectangle YO, OT, comme IO à YO, ce qui eſt auſſi comme IT à TV; c'eſt pourquoy en raiſon égale le rectangle IO, OT, eſt au quarré de PO, comme le meſme rectangle IO, OT au rectangle YO, OT; le rectangle YO, OT eſt donc égal au quarré de PO. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION IV.

*Si de quelque point* P *de l'une des hyperboles opposées, on mene le diametre* PC. *Je dis que* PC *estant prolongee au delà de* C, *rencontrera l'autre hyperbole opposée, & que le point* C *la coupera en deux egalement.*




Ayant mené PO ordonnée à l'axe IT, & ayant fait C *o* égale à CO, & mené *p o* R ordonnée des deux côtez de l'axe; il est évident *par la 2. prop.*

que R*o* eſt égale à PO, elle eſt auſſi perpendiculaire à *o* O; c'eſt pourquoy RP paſſera en C & ne fera qu'une meſme ligne droite avec PC menée d'abord, & elle ſera coupée en deux également en C. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION V.

*Une perpendiculaire* TX *menée à l'Axe* IT *le rencontrant en ſon extremité* T, *touche l'hyperbole au point* T. *

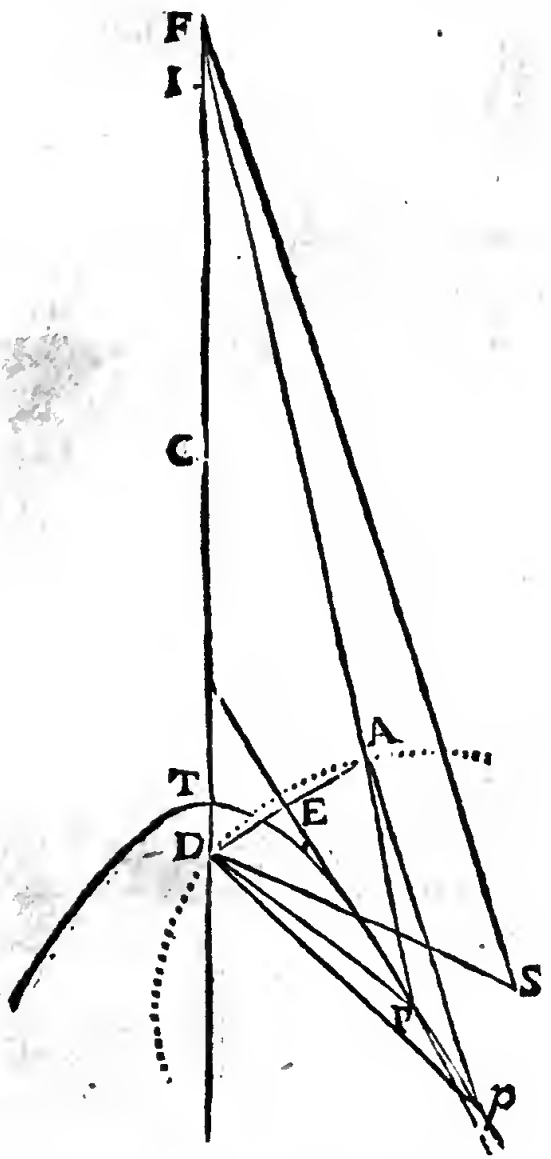
Si XT ne touche pas l'hyperbole, qu'elle la rencontre en quelqu'autre point S different de T s'il eſt poſſible: ayant pris T*d* égale à TD, F*d* ſera égale à IT, & S*d* à SD : mais *par la Generation*, IT, SD enſemble, ou bien leurs égales F*d*, S*d*, ſont égales à

* *Voyez la Figure de la page* 104.

FS, qui eſt le côté d'un triangle FS*d* égal à la ſomme des deux autres côtez F*d* *d*S, ce qui eſt abſurd; c'eſt pourquoy la perpendiculaire XT ne rencontre l'hyperbole qu'en T. Je dis auſſi qu'elle ne peut pas paſſer toûjours au dedans étant prolongée : car *par la generation de l'hyperbole*, il eſt évident qu'elle s'éloigne de plus en plus de l'axe indéterminé à qui XT eſt parallele : la ligne XT touche donc l'hyperbole en T. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION VI.

*Ayant poſé les meſmes choſes que dans la premiere propoſition ; ſi* DA *eſt menée & coupée en deux egalement en* E. *Je dis que la ligne droite* PE *touche l'hyperbole au point* P.




Si cela n'eſt pas, que PE rencontre l'hyperbole en quelqu'autre point *p*, s'il eſt poſſible. *Par la generation de*

*l'hyperbole*, la difference des lignes F*p*, *p*D eſt égale à la difference des lignes FP, PD ce qui eſt FA : mais par l'hypotheſe PE eſt perpendiculaire à AD, & la coupe en deux également en E : c'eſt pourquoy *p*A eſt égale à *p*D ; on aura donc dans le triangle F*p*A la difference des côtez F*p*, *p*A égale à l'autre côté FA. Ce qui eſt abſurd.

Mais ſi la ligne droite EP prolongée au delà de P, eſt toûjours au dedans de l'hyperbole, il eſt conſtant que l'hyperbole paſſera au delà de EP à l'égard de l'axe IT, ayant donc mené de quelqu'un de ſes points qui ſont au delà, comme S, les lignes SF, SD aux foyers ; *par la generation* la ligne IT ou FA qui luy eſt égale avec SD ſeront enſemble égales à SF : mais le point S étant au delà de la ligne EP à l'égard du point D, la ligne SA doit être plus petite que SD ; c'eſt pourquoy SA, FA jointes enſemble, ſeront plus petites que SF, ce qui eſt

abſurd, ces trois lignes étant les côtez du triangle FAS. Ce qui étoit propoſé eſt donc veritable.

## PROPOSITION VII.

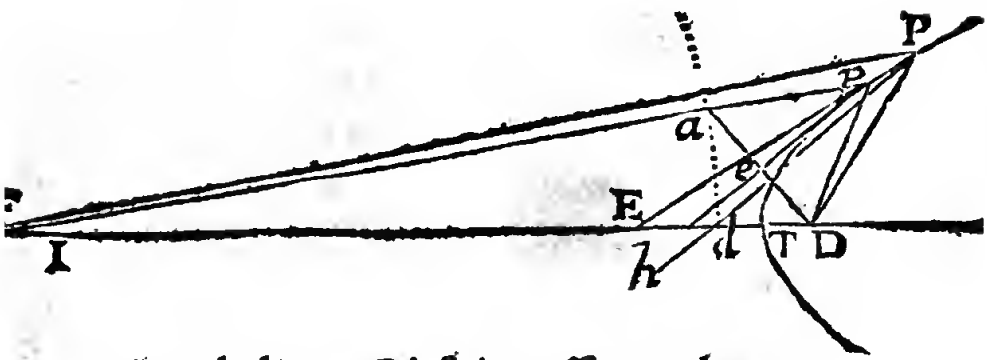
*Si une ligne droite* PE *touche une Hyperbole en* P ; *ayant mené* PF, PD *aux Foyers : Je dis que les angles* FPE, DPE *ſont égaux.* *

Du centre P ſoit décrit le cercle DA, & tiré la ligne DA, *par la precedente propoſition*, le triangle DPA eſt Iſoſcelle, & PE coupe ſa baſe en deux également ; c'eſt pourquoy l'angle DPE eſt égal à l'angle FPE. Ce qui étoit propoſé.

* *Voyez la precedente Figure.*

## PROPOSITION VIII.

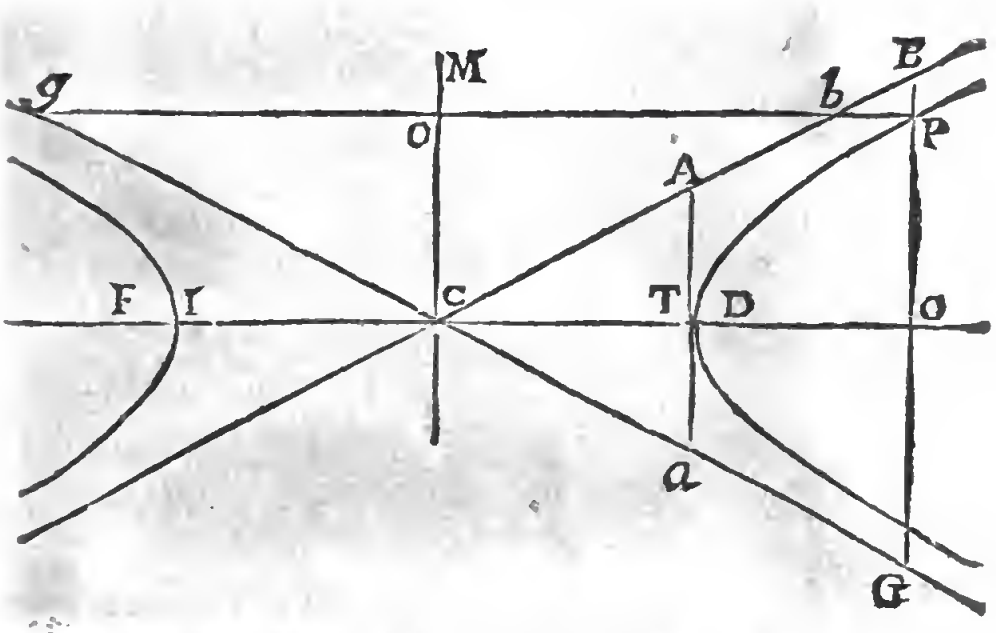
*Les meſmes choſes eſtant poſees, comme dans la 6. propoſition; Je dis que par le point* P *on ne peut mener que la ſeule touchante* PE.




Que la ligne P*h* ſoit auſſi touchante s'il eſt poſſible ; du Foyer D ayant mené D*a* perpendiculaire à P*h*, & ayant décrit le cercle *da* du centre F & du demi-diametre F*d* égale à IT, qui rencontre D *a* en *a*; ayant diviſé D *a* en deux également en *e*, & ayant tiré F*a* prolongée juſques à l'hyperbole en *p*, & ayant joint *p*D & *pe*:

*par la Generation*, *ap* & *p*D ſeront égales, & *pe* menée dans le triangle Iſoſcelle *ap*D diviſant la baſe D*a* en deux également en *e*, ſera perpendiculaire à D*a*; c'eſt pourquoy elle ſera parallele à P*h* : mais *par la 6. propoſ.* elle touche l'hyperbole en *p*; *pe* rencontrera donc la touchante qui paſſe par le point T en quelque point hors de l'hyperbole, puis qu'elles ſont toutes deux touchantes : c'eſt pourquoy ſa parallele P*h* paſſe au dedans de l'hyperboſe, car l'hyperbole va de P en *p*, & l'Ordonnée au point *p* rencontre P*h* au dedans de l'hyperbole, ce qui eſt abſurd, car elle a eſté poſée touchante : on ne peut donc mener que la touchante PE par le point P. Ce qui étoit propoſé.

## DEFINITION
### DES ASYMPTOTES.




Si par l'une des extremitez T de l'axe IT, on mene la ligne droite *a*TA perpendiculaire à IT, & que l'on faſſe que le quarré de TA ſoit égal au rectangle ID, DT; ayant pris T*a* égale à TA, par le centre C & par les points A, *a* ſoient menées les lignes AC, *a*C indéterminées d'un côté & d'autre du Centre, ces lignes

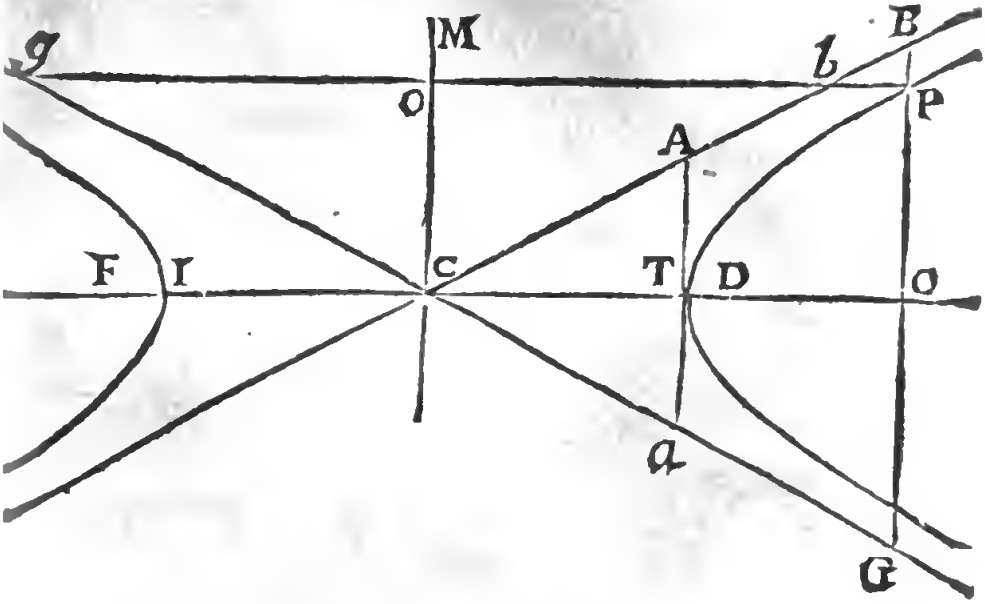
ſont appellées ASYMPTOTES de l'hyperbole ou des hyperboles oppoſées.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que les Aſymptotes d'une hyperbole, ſont auſſi Aſymptotes de l'hyperbole oppoſée.

## PROPOSITION IX.

*Si par quelque point* P *d'une Hyperbole, on prolonge* PO *Ordonnée à l'Axe* IT, *juſques aux Aſymptotes en* B *&* *en* G. *Je dis que le rectangle* GP, PB *eſt égal au quarré de* TA.



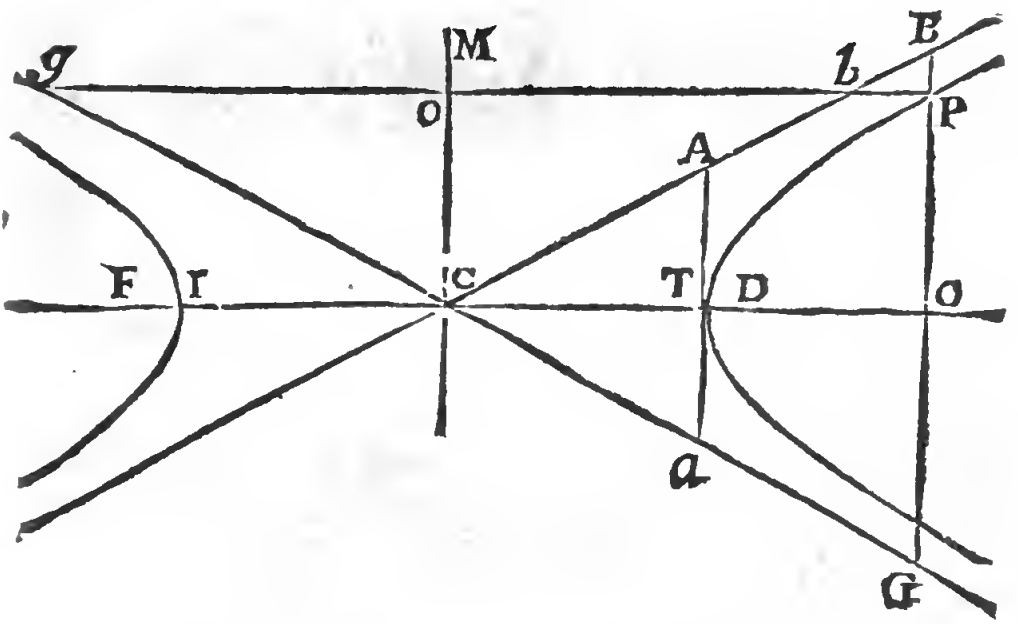

Les lignes droites TA & OB ſont paralleles entr'elles : c'eſt pourquoy le quarré de CT eſt au quarré de TA, comme le quarré de CO au quarré de OB ; & *par la premiere propoſition*, le quarré de CT eſt au quarré de TA, comme le quarré de CO moins le quarré de CT ( ce qui eſt égal au rectangle IO, OT ) au quarré de OP ; en raiſon égale le quarré de CO eſt au quarré de OB, comme le quarré de CO moins le quarré de CT au quarré de OP, ou bien le quarré de

CO eſt au quarré de CO moins le quarré de CT, comme le quarré de OB au quarré de OP ; & diviſant, le quarré de CO eſt au quarré de CO moins le quarré de CO plus le quarré de CT ( ce qui n'eſt que le ſeul quarré de CT ) comme le quarré de OB au quarré de OB moins le quarré de OP ; ou bien le quarré de CO eſt au quarré de OB ( ce qui eſt auſſi comme le quarré de CT au quarré de TA ) comme le quarré de CT au quarré de OB moins le quarré de OP ( ce qui eſt égal au rectangle GP, PB ) c'eſt pourquoy le rectangle GP, PB eſt égal au quarré de TA. Ce qui étoit propoſé.

## PROP. X.

## PROPOSITION X.

*Si de quelque point* P *d'une hyperbole on mene la ligne droite* Pg *parallele à l'Axe* IT, *rencontrant les deux Aſymptotes en* b *& en* g. *Je dis que le rectangle* gP, Pb *eſt égal au quarré de* CT.




*Par la poſition des Aſymptotes*, la ligne *bg* eſt coupée en deux égale-

ment en *o* par l'Axe CM, & à cauſe des triangles ſemblables le quarré de OB eſt au quarré de C*o*, ou de OP ſon égale, comme le quarré de CO, ou de *o*P ſon égale, au quarré de *ob*; & diviſant, le quarré de OB eſt au quarré de OB moins le quarré de OP, comme le quarré de *o*P au quarré de *o*P moins le quarré de *ob*, ou bien le quarré de OB moins le quarré de OP (ce qui eſt égal au rectangle GP, PB) eſt au quarré de *o*P moins le quarré de *ob* (ce qui eſt égal au rectangle *g*P, P*b*) comme le quarré de OB au quarré de *o*P, ou de CO : mais le quarré de OB eſt au quarré de CO, comme le quarré de TA au quarré de CT, c'eſt pourquoy en raiſon égale le rectangle GP, PB eſt au rectangle *g*P, P*b* comme le quarré de TA au quarré de CT : mais le rectangle GP, PB eſt égal au quarré de TA *par la precedente propoſ.* c'eſt pourquoy le rectangle *g*P, P*b* eſt égal au quarré de CT. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XI.

*Je dis que l'Hyperbole & ſon Aſymptote s'approchent toûjours de plus en plus eſtant prolongez l'un & l'autre, & qu'ils ne ſe rencontrent jamais, & enfin que l'on peut trouver la partie* PB *d'une Ordonnée à l'Axe, compriſe entre l'Hyperbole & ſon Aſymptote, moindre que quelque ligne donnée que ce ſoit.* *

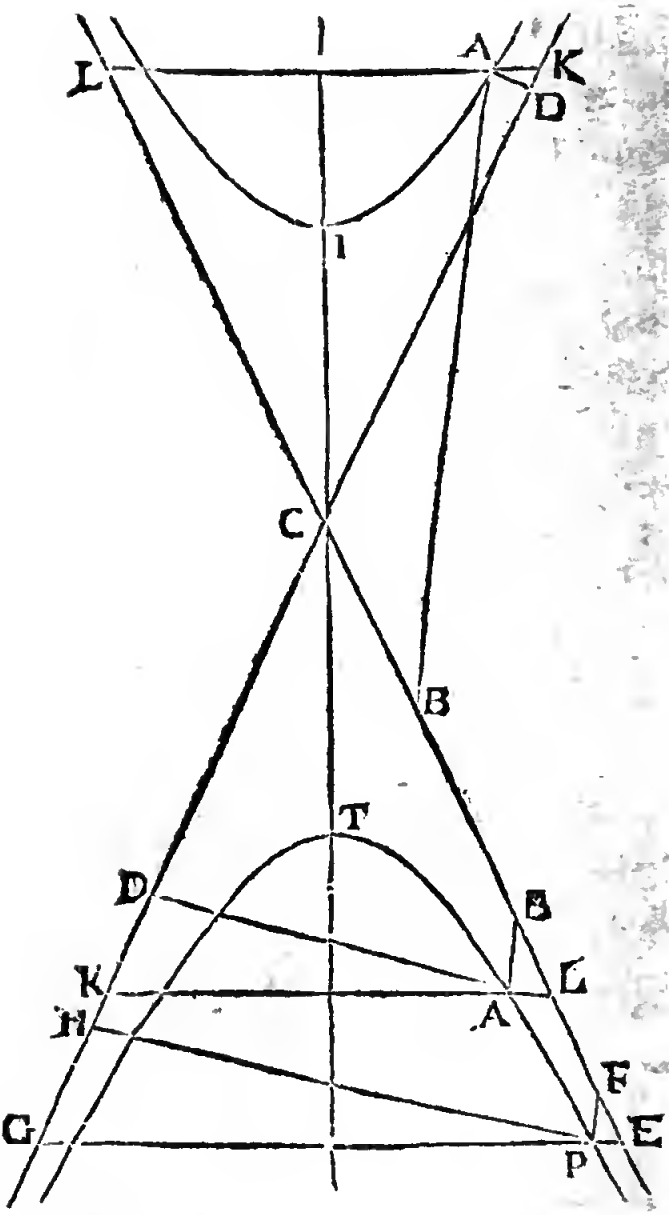
*Par la 9. propoſition*, le rectangle GP, PB eſt égal au quarré de TA; mais GB augmente à meſure qu'elle s'éloigne du centre C : c'eſt pourquoy PB diminuë toûjours : mais elle ne peut jamais eſtre nulle, car le rectangle GP, PB ſeroit nul, ce qui ſe-

* *Voyez la precedente Figure.*

roit contraire à la même propoſition; c'eſt pourquoy l'hyperbole & l'aſymptote ne ſe rencontreront jamais; enfin ſi l'on fait un rectangle dont l'un des côtez ſoit plus petit que la ligne donnée, & qui ſoit égal au quarré de TA, la ſomme des deux côtez de ce rectangle, comme GB, étant appliquée dans l'angle compris par les aſymptotes & perpendiculairement à IT, le point de diviſion P des côtez de ce rectangle ſera dans l'hyperbole *par la 9. propoſition*, & PB a eſté poſée plus petite que la ligne donnée. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XII.

*Si l'on prend deux points* P, A *dans une Hyperbole, ou dans chacune des Hyperboles oppoſees, un point ſeulement, & ſi par ces points on mene des lignes droites* PH, AD *paralleles entr'elles & terminées à l'une des Aſymptotes* CD; *Semblablement ſi par les mêmes points* P, A *on mene deux autres lignes droites* PF, AB *auſſi paralleles entr'elles & terminées à l'autre Aſymptote* CB: *Je dis que le rectangle* PH, PF *eſt égal au rectangle* AD, AB.




Par les points P, A ayant mené les perpendiculaires à l'axe EPG,

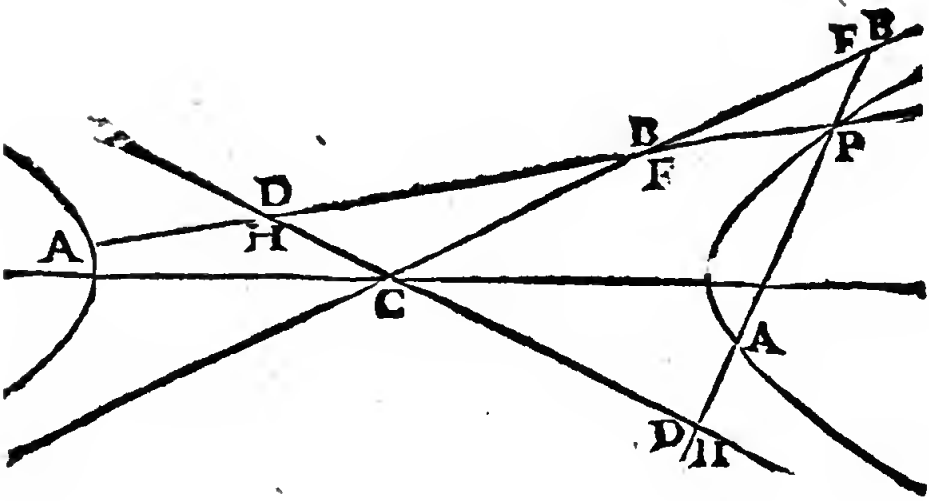
LAK terminées aux asymptotes en EGLK. A cause des paralleles les triangles EPF, LAB; & PGH, AKD sont semblables; c'est pourquoy EP est à PF, comme LA à AB; & PG à PH, comme AK à AD; si l'on fait donc des rectangles avec les termes des deux proportions precedentes, pris par ordre, on aura le rectangle EP, PG au rectangle PF, PH, comme le rectangle LA, AK au rectangle AB, AD : mais le rectangle EP, PG est égal au rectangle LA, AK, car *par la 9. proposition*, ils sont égaux au quarré d'une même ligne droite; c'est pourquoy le rectangle PF, PH est égal au rectangle AB, AD Ce qui étoit proposé.

## COROLLAIRE.

Il est évident que ce qui a esté démontré cy-dessus pour deux points seulement, se peut démontrer de même pour quel nombre de points que ce soit.

## PROPOSITION XIII.

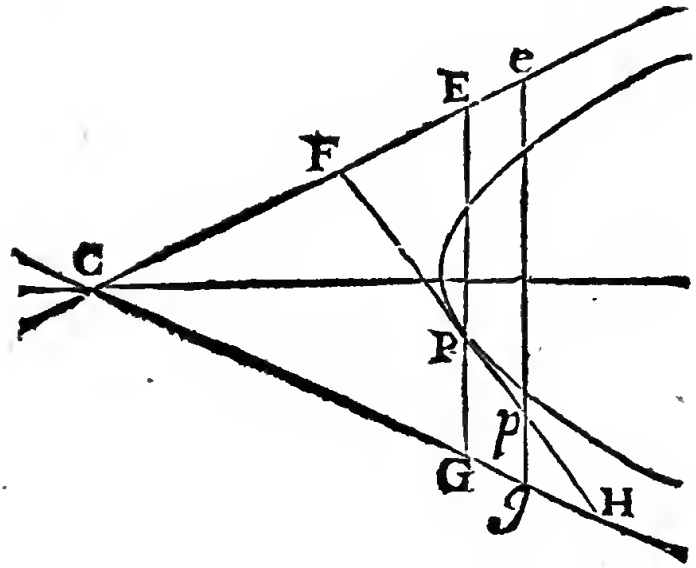
*Si l'on mene une ligne droite* PA *comme l'on voudra, qui rencontre une Hyperbole, ou bien les Hyperboles opposées aux points* P, A, *& les Asymptotes en* F *&* H. *Je dis que les parties de cette ligne* PF, AH *prises entre l'Hyperbole, ou les Hyperboles opposées, & les Asymptotes, sont egales entr'elles.*



*Par la precedente propoſition*, le rectangle PF, PH, eſt égal au rectangle AB, AH, car les lignes PF, AB, ſont paralleles entr'elles étant jointes directement, auſſi-bien que PH, AD : mais les ſommes ou les differences HF, DB des côtez de ces rectangles égaux, ſont égales étant la même ligne droite ; c'eſt pourquoy les côtez de ces rectangles ſont auſſi égaux, à ſçavoir PF égal à AD, & PH égal à AB. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XIV.

*Si une ligne droite* FH *touche une Hyperbole en* P. *Je dis qu'elle rencontre les Aſymptotes en* F *& en* H, *& que le point touchant* P *la diviſe en deux également.*




Premierement par le point P ſoit mené EPG ordonnée à l'axe, & ſi la touchante en P ne rencontre pas les aſymptotes, elle ſera parallele à quelqu'une, que ce ſoit à CG s'il eſt poſſible. *Par la 11. propoſition*, on poura trouver une ligne plus petite que PG, & qui luy étant parallele ſoit compriſe entre l'hyperbole & l'aſymptote, laquelle étant prolongée rencontrera neceſſairement la touchante FPH parallele à CG au dedans

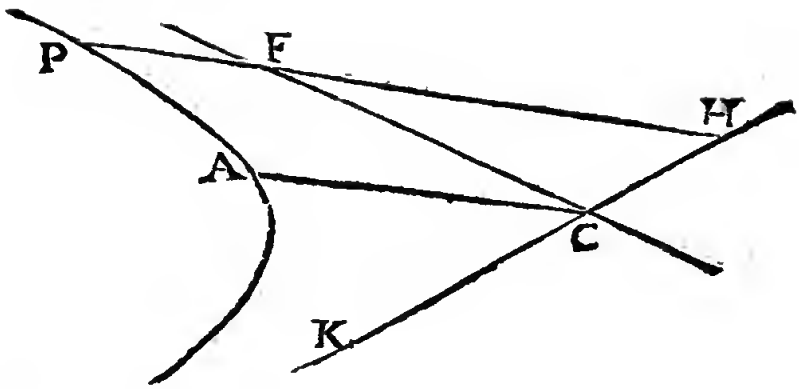
de l'hyperbole, ce qui eſt abſurde, car FPH eſt poſée touchante ; une touchante rencontre donc les deux aſymptotes. Ce qui étoit premierement propoſé.

Secondement, ſi PH n'eſt pas égale à PF, qu'elle ſoit plus grande s'il eſt poſſible ; ayant coupé H*p* égale à FP, ſoit mené *epg* parallele à EPG. A cauſe des parties égales PF, H*p*, & des paralleles GE, *ge*, *pg* eſt à PG, comme H*p* à HP, & H*p* à HP ou leurs égales FP à F*p*, comme PE à *pe* ; & en raiſon égale *pg* à PG, comme PE à *pe* ; c'eſt pourquoy le rectangle PG, PE eſt égal au rectangle *pg*, *pe*, & *par la converſe de la 9. propoſ.* le point *p* ſera l'un des points de l'hyperbole ; FPH rencontrera donc l'hyperbole en deux points P*p* contre l'hypotheſe, car elle a eſté poſée touchante. C'eſt pourquoy ce qui eſtoit propoſé eſt vray.

Cette propoſition eſt évidente *par la 12. & par la precedente*, car les lignes PF, PH, & AB, AD ſont paralleles entr'elles, & ſi BD eſt touchante en A, le point A la diviſe en deux également, *par la precedente propoſition.*

## PROPOSITION XVI.

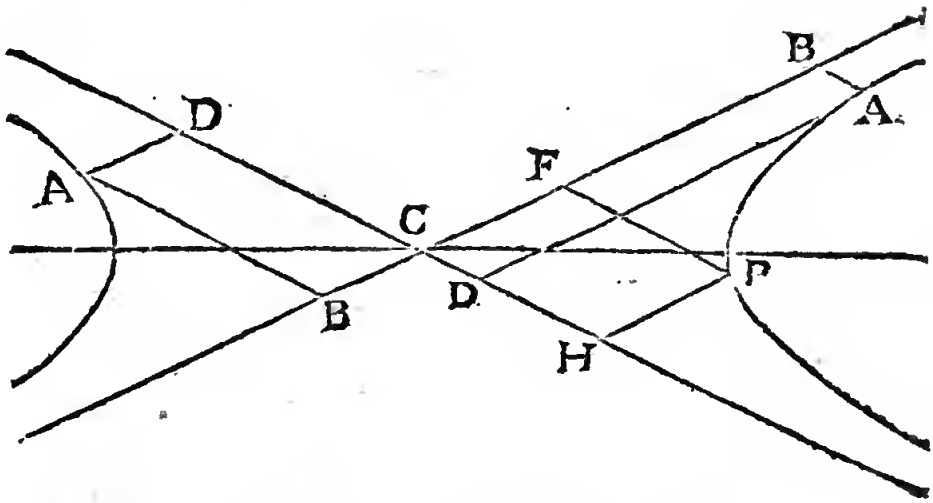
*Si de quelle point* P *d'une Hyperbole, on mene la ligne droite* PH *parallele à un Diametre determiné* CA. *Je dis que* PH *rencontre les Aſymptotes aux points* F, H *& que le rectangle* PF, PH *eſt égal au quarré de* CA.




Puiſque CA eſt au dedans de l'angle compris par les aſymptotes, il eſt évident que PH qui eſt parallele à CA doit rencontrer les aſymptotes en F & en H : mais *par la 12. propoſition*, les lignes AC, PF étant paralleles & rencontrant l'aſymptote CF ; & AC, PH étant auſſi paralleles & rencontrant l'autre aſymptote CH, le rectangle AC, AC qui eſt le quarré de AC eſt égal au rectangle PF, PH. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XVII.

*Si des points* P, A *d'une Hyperbole ou des Hyperboles oppoſées, on mene des lignes* PF, PH, & AB, AD *paralleles aux Aſymptotes. Je dis que le Parallelogramme* PFCH *eſt égal au Parallelogramme* ABCD.

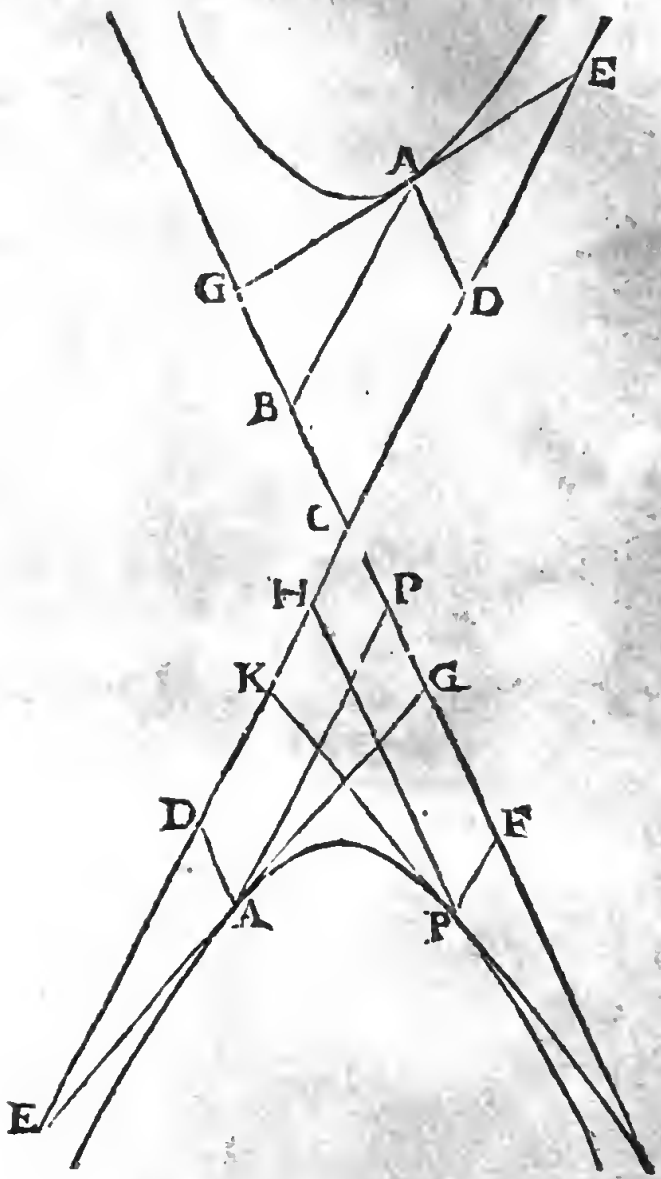



*Par la* 12. *propoſ.* le rectangle PF, PH eſt égal au rectangle AB, AD; c'eſt pourquoy PH eſt à AD, comme

AB à PF : mais l'angle FPH eſt égal à l'angle BAD, c'eſt pourquoy les parallelogrammes CP, CA ſont égaux. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XVIII.

*Si des lignes droites* KI, EG *touchent une Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées. Je dis que les triangles* KCI, ECG *compris par les touchantes & par les Aſymptotes, ſont égaux entr'eux.*

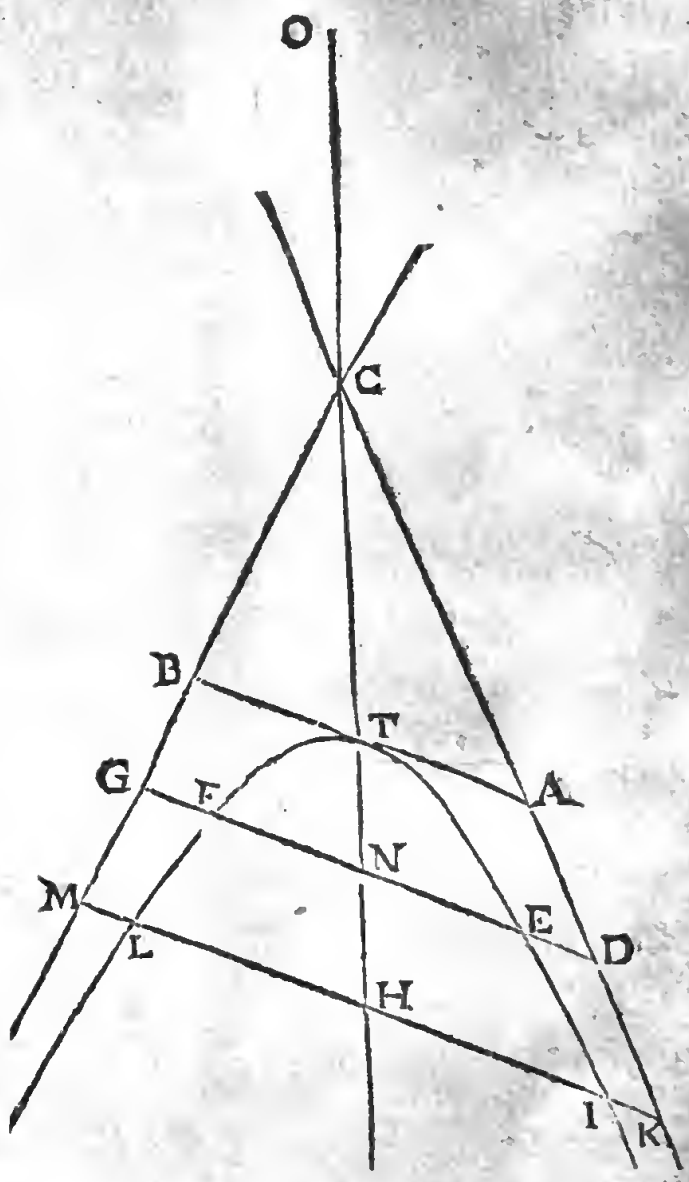



Par les points touchants P, A ayant mené des paralleles aux aſymptotes

AB, AD, & PF, PH; *par la precedente propoſition*, les parallelogrammes CA, CP ſont égaux; mais à cauſe que les touchantes ſont coupées en deux également par leur point touchant *par la* 14. *prop.* le parallelogramme CP ſera moitié du triangle CIK, & le parallelogramme CA ſera auſſi moitié du triangle CEG; c'eſt pourquoy ces triangles ſont égaux. Ce qui étoit propoſé.

## PROPOSITION XIX.

*Si une ligne droite* BTA *touche une Hyperbole en* T, *& autant d'autres lignes droites que l'on voudra, comme* FE, LI *paralleles à cette touchante, & terminées dans l'Hyperbole. Je dis que le Diametre* OCT *mené par le point touchant* T, *coupe les paralleles* FE, LI *en deux également en* N *&* H.

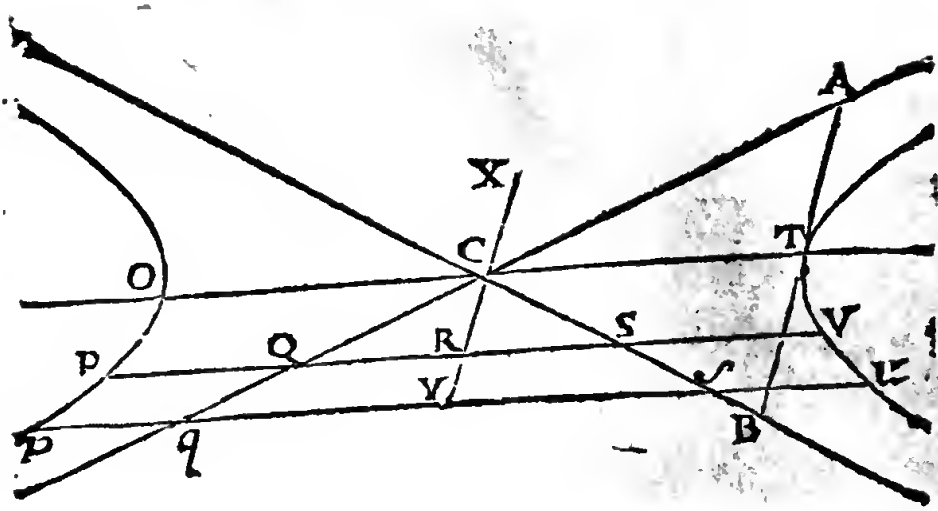



*Par la* 14. *propoſition*, la touchante BA eſt diviſée en deux également en

T ; c'eſt pourquoy FE, LI étant prolongées juſques aux aſymptotes en G, D, M, K ; GD & MK ſeront auſſi coupées en deux également en N & H par le diametre CT : mais *par la 13. propoſition*, GF eſt égale à ED, & ML à IK ; c'eſt pourquoy FN eſt égale à NE, & LH à HI. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XX.

*Si une ligne droite* AB *touche une Hyperbole en* T, *ſoit le Diametre* XCR *parallele à la touchante* AB, *& un autre Diametre* OCT *qui paſſe par le point touchant* T. *Je dis que toutes les paralleles, comme* PV, pu *au Diametre* OT *& terminées entre les Hyperboles oppoſées, ſont coupées en deux également en* R *&* r *par le Diametre* XCR.




A cauſe que AB parallele à XC, eſt coupée en deux également en T, il s'enſuit que QS & *qſ* compriſes entre les aſymptotes, & paralleles à CT, ſeront auſſi coupées en deux également en R, & en *r*: mais *par la* 13. *propoſition*, PQ eſt égale à SV, & *pq* à *ſu*; c'eſt pourquoy PR eſt égale à RV, & *pr* égale à *ru*. Ce qui étoit propoſé.

## DEFINITIONS.

I.

* Les diametres OT, XR qui ont

* *Voyez les 2. Figures precedentes.*

les proprietez démontrées dans les deux propoſitions precedentes ſont appellez CONJUGUEZ l'un à l'autre.

2.

Et la ligne droite EN parallele à l'un d'eux XC eſt appellée ORDONNE'E à l'autre OT, & reciproquement VR ORDONNE'E à XC.

## PROPOSITION XXI.

*Le quarré d'une Ordonnée* EN *a un Diametre determiné* OT, *eſt au rectangle* ON, TN *fait des parties de ce Diametre, priſes entre ſes extremitez* O, T *& la rencontre de l'Ordonnée, comme le quarré de* AT *au quarré de* CT.*

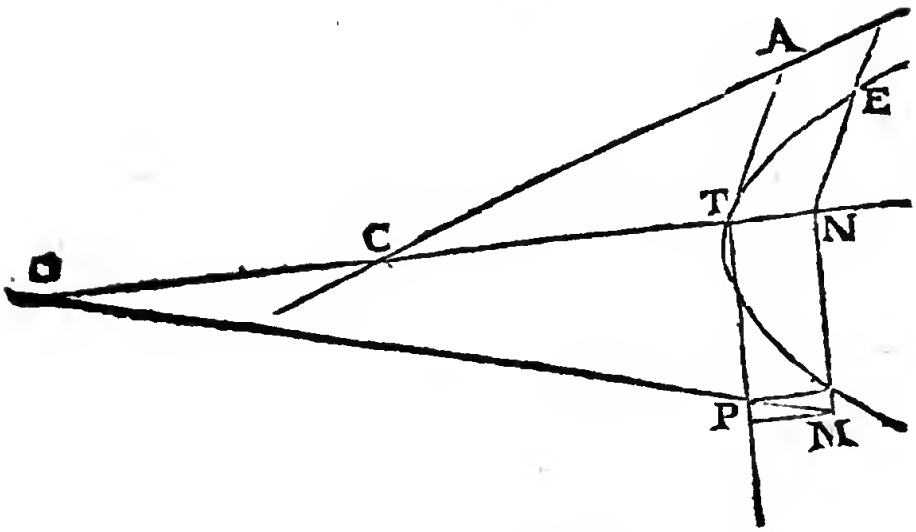
* *Voyez la Figure de la page* 139.

A cauſe des triangles ſemblables le quarré de DN eſt au quarré de TA, comme le quarré de CN au quarré de CT ; & diviſant, le quarré de DN moins le quarré de TA, qui eſt égal au rectangle GE, ED *par la 15. propoſition* (ce qui eſt égal au quarré de EN) eſt au quarré de TA, comme le quarré de CN moins le quarré de CT (ce qui eſt égal au rectangle ON, TN au quarré de CT : c'eſt pourquoy le quarré de EN eſt au quarré de TA, comme le rectangle ON, TN au quarré de CT. Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

Il eſt évident que les quarrez des Ordonnées EN, IH a un diametre déterminé OT ſont entr'eux comme les rectangles ON, TN, OH, TH, faits des parties de ce diametre priſes entre ſes extremitez O, T & les rencontre N, H des mêmes Ordonnées.

## DEFINITIONS.




1.

Si l'on fait comme CT à TA, ainſi TA à la moitié de TP, la ligne droite TP eſt appellée PARAMETRE du diametre déterminé OT.

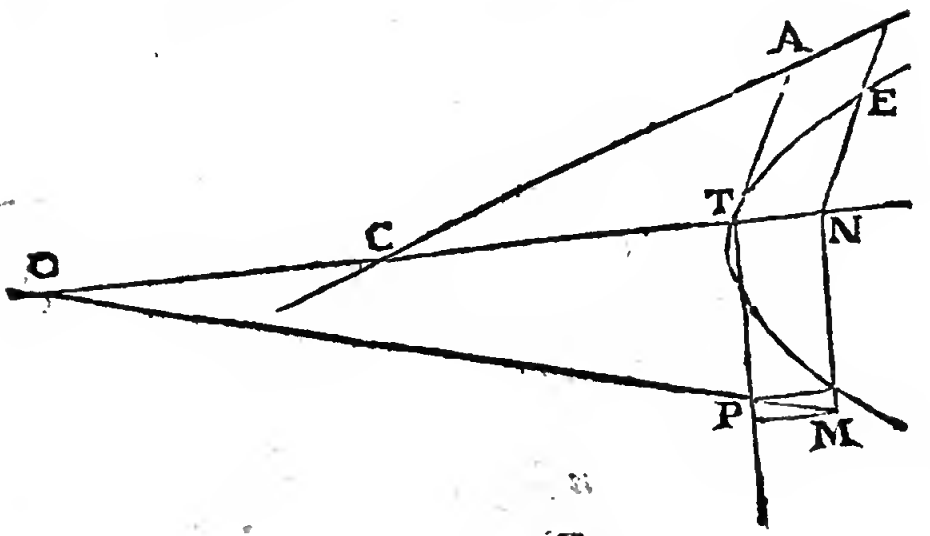
2.

Le rectangle OP compris d'un diametre déterminé OT & de ſon Parametre, eſt appellé la FIGURE de ce diametre OT.

## PROP. XXII.

## PROPOSITION XXII.

*Le quarré d'une Ordonnée* EN *à un Diametre determiné* OT, *eſt egal au rectangle* TM *appliqué au Parametre* TP, *ayant pour hauteur la partie* TN *du Diametre compriſe entre ſon extremité* T *& la rencontre* N *de l'Ordonnée, lequel rectangle* TM *eſt excedent d'un rectangle* PM *ſemblable & ſemblablement posé à la figure* OP.



*Par la formation du parametre*, OT eſt à TP, comme le quarré de CT au quarré de TA, & *par la precedente propoſition*, le quarré de CT eſt au quarré de TA, comme le rectangle ON, TN au quarré de NE : mais le rectangle ON, TN eſt au rectangle MN, TN, comme ON à MN, qui eſt comme OT à TP, & en raiſon égale le rectangle ON, TN eſt au quarré de NE, comme le rectangle ON, TN au rectangle MN, TN ; c'eſt pourquoy le quarré de NE eſt égal au rectangle MN, TN. Ce qu'il falloit démontrer.

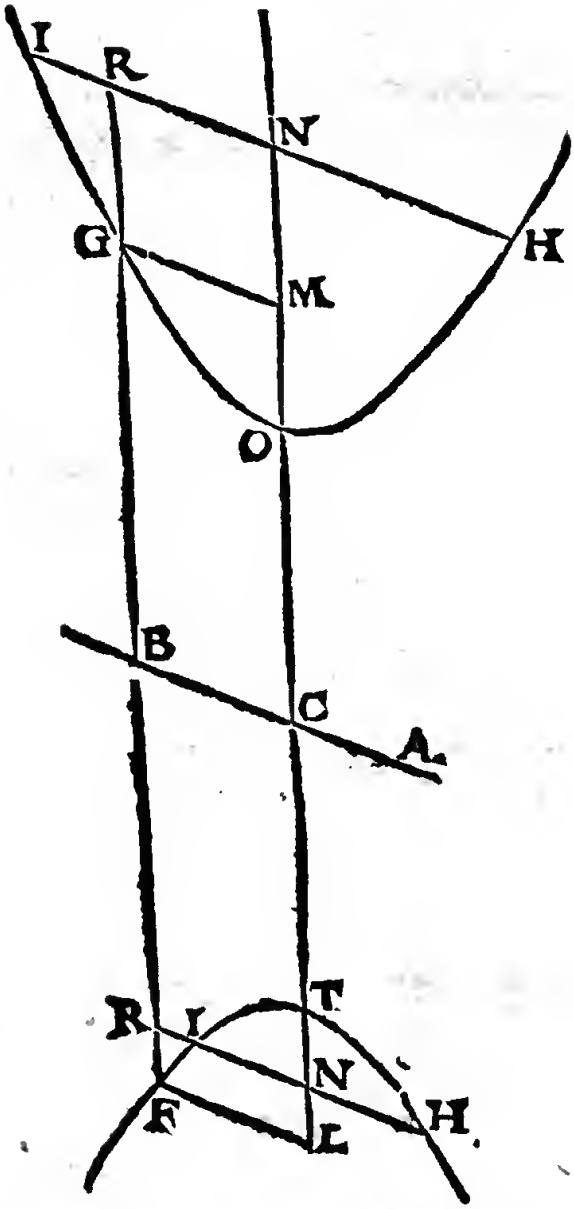
## COROLLAIRE.

Si le parametre TP eſt égal au diametre OT, il s'enſuivra par la formation du parametre, que TA ſera égale à CT, c'eſt à dire à la moitié du même parametre : mais il eſt auſſi évident *par la démonſtration de la* 18. *propoſition*, que le triangle ABG eſt

rectangle en B, ſi le diametre mené du centre C au point touchant A eſt égal à la touchante AG, priſe entre le point touchant A & l'aſymptote; car le triangle CAG ſeroit Iſoſcele & ſa baſe CG doit être coupée en deux également en B par la ligne AB parallele à l'autre aſymptote CE : c'eſt pourquoy ſi les aſymptotes d'une hyperbole ſont à angles droits, tous les diametres ſeront égaux à leurs parametres, & ſi dans une hyperbole un diametre eſt égal à ſon parametre, tous les autres le ſeront auſſi, & les aſymptotes ſeront à angles droits; & de plus il eſt encore évident que dans une hyperbole qui n'a pas ſes aſymptotes à angles droits, il ne peut y avoir aucun diametre égal à ſon parametre.

## PROPOSITION XXIII.

*Si dans les Hyperboles opposées, deux lignes droites* HI, FG *paralleles à deux Diametres conjuguez* AB, OT, *se rencontrent en un point* R. *Je dis que le rectangle* FR, RG *est au rectangle* HR, RI, *comme le Diametre* OT *à son Parametre.*




Ayant mené FL & GM ordonnées au diametre OT, elles ſeront paralleles à AB, *par la definition des dia-*

*metres conjuguez*, & le diametre OT coupe en deux également HI en N *par la 19. proposition.*

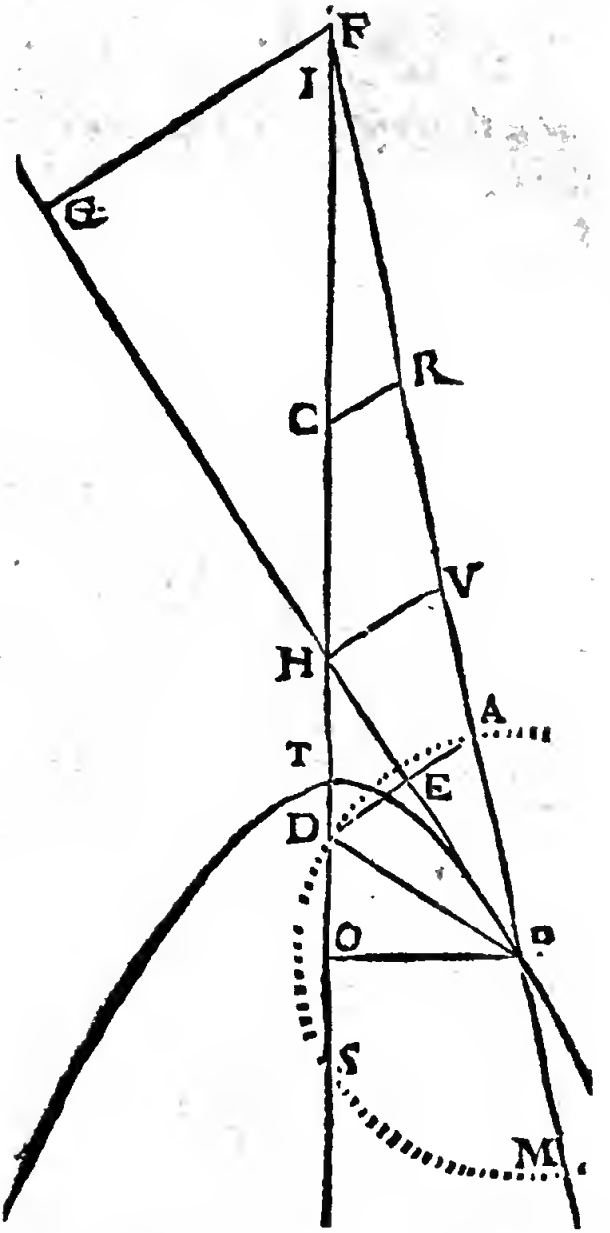
Semblablement GF est coupée en deux également par le diametre AB; mais CO est égale à CT, & ML est égale à CF : c'est pourquoy TL est égale à OM. *Par la 21. proposition*, le quarré de LF est au quarré de NI, comme le rectangle OL, LT au rectangle ON, NT, & si le point R est dehors les hyperboles opposées en divisant, le quarré de LF moins le quarré de NI (ce qui est égal au rectangle HR, RI) est au quarré de NI, comme le rectangle OL, LT moins le rectangle ON, NT (ce qui est égal au rectangle MN, NL, ou à son égal le rectangle FR, RG, car MO & TL sont égales) au rectangle ON, NT; on aura donc le rectangle HR, RI au quarré de NI, comme le rectangle FR, RG au rectangle ON, NT.

Mais si le point R est au dedans de l'une des hyperboles opposées en di-

viſant, le quarré de NI moins le quarré de LF, ou GM ou NR qui ſont toutes trois égales ( ce qui eſt égal au rectangle HR, RI ) eſt au quarré de NI, comme le rectangle ON NT moins le rectangle OL, LT, ou bien ſon égal le rectangle OM, MT ( ce qui eſt égal au rectangle FR, RG ) au rectangle ON, NT ; on aura donc le rectangle HR, RI au quarré de NI, comme le rectangle FR, RG au rectangle ON, NT : mais dans les deux cas *par la 21. propoſition , & par la definition du parametre* , le rectangle ON, NT eſt au quarré de NI, comme le diametre OT à ſon parametre : c'eſt pourquoy en raiſon égale , le rectangle FR, RG eſt au rectangle HR, RI, comme le diametre OT à ſon parametre. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XXIV.

*Dans une Hyperbole* PT *dont l'Axe eſt* IT *& le centre* C, *ſoit le point* H *la rencontre d'une touchante* PH *avec l'Axe, &* PO *ſoit ordonnée à l'Axe, paſſant par le point touchant* P. *Je dis que* CH *eſt à* CT, *comme* CT *à* CO.




Soient les points F, D les Foyers & du point P pour centre & intervalle PD ayant décrit le cercle

MSDA, & mené DA ; la touchante PH coupera DA en deux également en E *par la 6. propoſition.* Des points F, C, H, ayant mené FG, CR, HV, paralleles à DA, FA ſera coupée en deux également en R, car FD l'eſt en C.

A cauſe des triangles ſemblables FP eſt à PA, comme FG à AE, ou DE ſon égale ; & FG eſt à DE, comme FH à DH, & FH eſt à DH, comme FV à VA, en raiſon égale FP eſt à PA, comme FV à VA ; diviſant FP moins PA (ce qui eſt égal à FA) eſt à PA, comme FV moins VA (ce qui eſt égal à 2RV) à VA : mais FA eſt à 2RV, comme leurs moitiez RA à RV ; & en raiſon égale RA eſt à PA comme RV à VA ; compoſant RA eſt à RA plus PA (ce qui eſt égal à RP) comme RV à RV plus VA (ce qui eſt égal à RA) c'eſt pourquoy RA à RP, comme RV à RA, & le quarré de RA ſera donc égal au rectangle RP, RV.

Maintenant à cauſe du cercle MSDA, comme dans la premiere propoſition FD eſt à FA, comme FM à FS, & leurs moitiez CD eſt à RA, comme RP à CO; mais CD eſt à RA, comme CH à RV; & en raiſon égale RP ſera à CO, comme CH à RV, & le rectangle des extremes étant égal aux rectangles des moyennes de cette proportion, le rectangle CH, CO ſera égal au rectangle RP, RV: mais le rectangle RP, RV vient d'être démontré cy-deſſus égal au quarré de RA, & RA eſt égale à CT *par la conſtruction*; c'eſt pourquoy le quarré de CT eſt égal au rectangle CH, CO; CH ſera donc à CT, comme CT à CO. Ce qui étoit propoſé.

## COROLLAIRE.

Puiſque CH eſt à CT, comme CT à CO, en renverſant la démonſtration qui a eſté faite au premier ar-

ticle de cette propoſition, l'on démontrera que IO eſt à OT comme IH à HT, & la ligne IO eſt dite *diviſée en trois parties harmoniquement*, aux points I, O, T, H.

# DESCRIPTION
## DES SECTIONS CONIQUES
## SUR UN PLAN.

### AVERTISSEMENT.

*LES Deſcriptions des lignes courbes que l'on fait ſur un Plan par des mouvemens continus d'un point, avec des Machines, ſont ſi ſujettes à l'erreur, qu'il ne faut s'en ſervir qu'une fois pour en eſtre entierement rebuté: c'eſt pourquoy je ſuis perſuadé, que pour ces Deſcriptions on ne doit chercher qu'une tres-grande quantité de points, avec quelque maniere aiſée, par leſquels on puiſſe tracer la ligne courbe que l'on ſouhaite; & comme il arrive ſouvent que l'on n'a beſoin que d'une petite*

*partie de cette ligne, on peut trouver en cet endroit un ſi grand nombre de points, que l'on ne peut faire aucune faute conſiderable en la traçant par tous les points trouvez. La Deſcription des Sections Coniques que j'ay propoſée au commencement des démonſtrations de chacune, eſtant receuë generalement pour la plus ſimple de toutes lorſque l'on a les Foyers ou les Axes, il ſeroit inutile d'en chercher d'autres, les meſmes choſes eſtant données : mais il arrive ſouvent que l'on a beſoin de décrire ces lignes courbes ſur un Plan, n'ayant dans la Parabole que quelqu'un de ſes Diametres avec ſon Parametre & l'Angle des Ordonnées à ce Diametre ; dans l'Ellipſe deux Diametres conjuguez eſtant propoſez ; & dans l'Hyperbole l'Angle compris par les Aſymptotes & quelque point de l'Hyperbole, ou bien un Diametre avec ſon Parametre ; ou enfin dans toutes les trois un Diametre eſtant donné avec une de ſes Ordonnées ; c'eſt ce qui m'a*

*perſuadé que l'on auroit agreable les deſcriptions de ces lignes dans les cas propoſez, & j'auray par ce moyen entierement ſatisfait à la promeſſe que j'avois faite, de donner des Elemens ſimples & faciles d'une partie des plus conſiderables de la Geometrie.*

## PROBLEME I.

*Un Diametre d'une Section Conique eſtant donné avec une Ordonnée à ce Diametre, trouver ſon Parametre, & dans l'Ellipſe déterminer ſon Diametre conjugué.*

### POUR LA PARABOLE.

Si l'on fait comme la partie du diametre, compriſe entre ſon extrêmité & la rencontre de l'ordonnée, à l'ordonnée, ainſi l'ordonnée a une troiſiéme en proportion continuë;

Il eſt évident *par la Définition du Parametre d'un Diametre de la Parabole*, que cette troiſiéme proportionnelle eſt le parametre cherché.

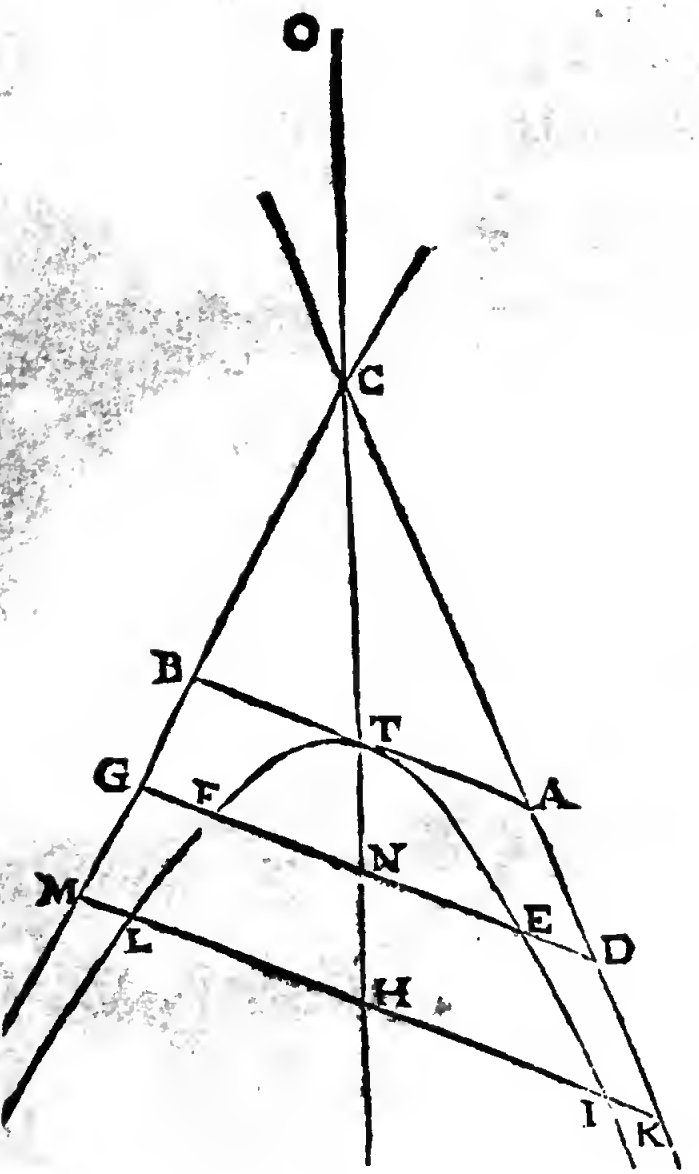
## POUR L'ELLIPSE, ET L'HYPERBOLE.

Si l'on fait comme le rectangle des parties du diametre faites par la rencontre de l'ordonnée à ce diametre, au quarré de cette ordonnée, ainſi le diametre a une quatriéme proportionnelle, cette quatriéme ſera le parametre de ce diametre ; & dans l'Ellipſe ayant trouvé la moyenne proportionnelle entre ce diametre & ſon parametre, ſi l'on mene par le centre une ligne droite parallele à l'ordonnée, & qui ſoit égale à cette moyenne proportionnelle, & qui ſoit coupée en deux également par le centre, on aura le diametre conjugué au diametre propoſé ; ce qui eſt évident *par la définition du parametre*

*d'un diametre de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, & par les 17. & 18. propoſitions de l'Ellipſe.*

## PROBLEME II.

*Dans une Hyperbole un Diametre déterminé eſtant propoſé avec ſon Parametre, & l'Angle que ce Diametre comprend avec ſes Ordonnées, décrire les Aſymptotes.*



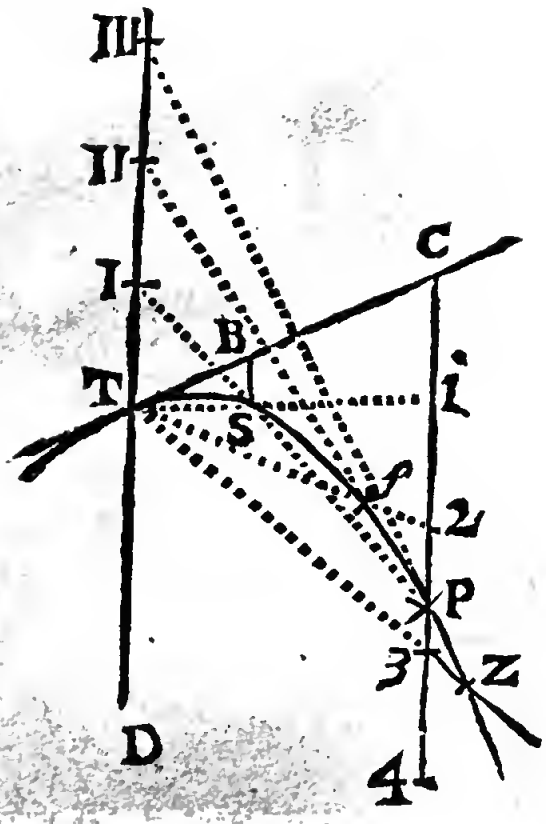

Soit le diametre donné OT, & l'angle ONE que ce diametre fait

avec ſes ordonnées. Par l'extrêmité T ſoit mené ATB parallele à EN, & ayant trouvé AB moyenne proportionnelle entre le diametre OT & ſon parametre, ſoit coupé TA, & TB chacune égale à la moitié de AB; par le centre C & par les points A, B ayant prolongé les lignes droites CA, CB d'un côté & d'autre du centre C: Je dis que CA, CB ſont les Aſymptotes de l'Hyperbole propoſée.

La propoſition eſt évidente *par la generation du parametre d'un diametre de l'hyperbole.*

## PROBLEME III.

*La ligne droite* ITD *eſtant donnée pour un Diametre d'une Parabole, & le point* P *pour un de ſes points, avec la ligne* CT *touchante à l'extrêmité* T *de ce Diametre, ou bien l'angle* DTC *égal à celuy que ce Diametre comprend avec ſes Ordonnées ; décrire la Parabole.*



Par le point P ayant mené CP parallele à TD & prolongée vers P, ſoit pris ſur la ligne CP les parties C*i*, *i* 2, 2 3 &c. égales entr'elles, & de quelle grandeur on voudra en commençant au point C où CP rencontre TC; ſoit marqué les meſmes parties TI, I II, II III &c. ſur le diametre DT prolongé au delà de l'extrêmité T, & en commençant à ce meſme point T; ayant tiré les lignes PI, T*i* qui ſe rencontreront en quelque point S. Je dis que le point S eſt un des points de la Parabole requiſe.

Soit mené SB parallele à DT; à cauſe des triangles ſemblables TBS, TC*i*, & ITS, P*i*S, BS eſt à C*i* ou à TI ſon égale, comme TB à TC: TI eſt à *i*P plus TI ou C*i* ſon égale, (ce qui eſt égal à CP) comme TS à T*i*, ou comme TB à TC; c'eſt pourquoy BS eſt à CP en la raiſon double de TB à TC; mais auſſi le quarré de TB eſt au quarré de TC en la raiſon

double de leurs côtez TB, TC ; c'eſt pourquoy le quarré de TB eſt au quarré de TC, comme BS à CP, & le point P eſtant un des points de la parabole, il eſt évident *par le 3 Coroll. 3. de la 1. Propoſition de la Parabole*, que le point S ſera auſſi un des points de la Parabole requiſe.

On démontrera de meſme que la rencontre ſ des lignes P II & T 2, & Z celle des lignes P III & T 3, & ainſi de ſuite, ſeront des points de la meſme Parabole, & ſi l'on prend les parties C *i* tres-petites, les points de la Parabole que l'on trouvera ſeront tres-proches les uns des autres.

# PROBLEME IV.

*Les lignes droites* AB, ED, *qui s'entrecoupent en deux également au point* C, *eſtant données pour les Diametres conjuguez d'une Ellipſe ; décrire l'Ellipſe.*

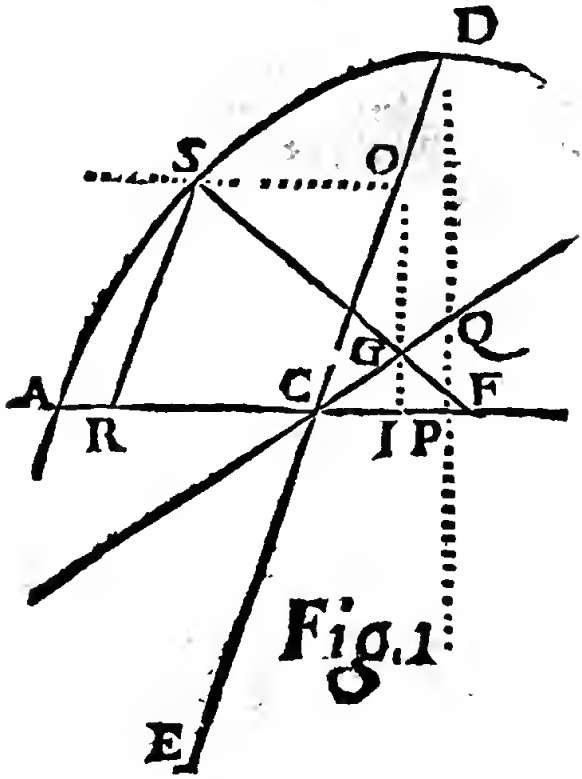
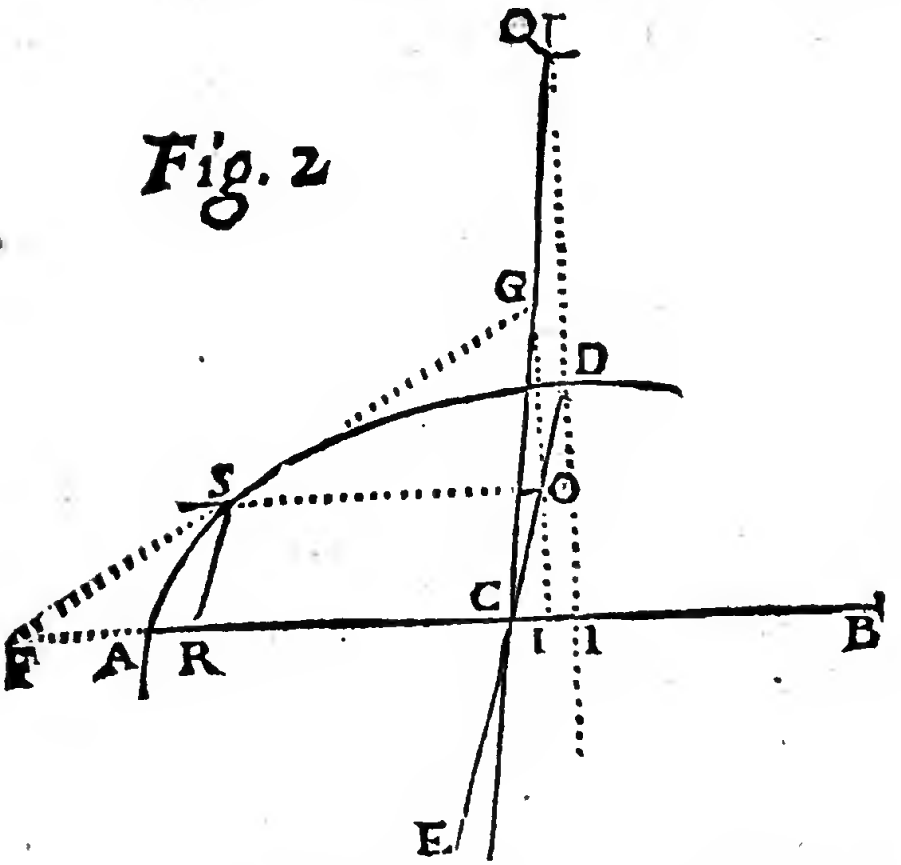



Fig. 1

Par une extrêmité D de quelqu'un des diametres, ſoit mené DP perpendiculaire à l'autre diametre conjugué AB, & prolongée d'un côté & d'autre, & ſur cette ligne ſoit priſe DQ

Fig. 2




d'un côté ou d'autre de D égale à la moitié CA du diametre AB; par le centre C & par le point Q ſoit tiré la ligne CQ prolongée d'un côté & d'autre

d'autre de C; de quelque point O du diametre DE ayant mené les lignes droites OS parallele à CA, & OG parallele à DQ, & du point G pour centre, & pour demi-diametre GS égale à CA ayant décrit l'arc S rencontrant OS en S. Je dis que le point S eſt un des points de l'Ellipſe requiſe.

A cauſe des triangles ſemblables CDQ, COG, comme le quarré de CD eſt au quarré de CO, ou de RS parallele à CD; ainſi le quarré de DQ ou de GS ou de CA qui luy ſont égales, au quarré de OG : mais le quarré de OG eſt égal à la difference des quarrez de GS & de SO, car le triangle GOS eſt rectangle en O, & le meſme quarré de GO eſt égal à la difference des quarrez de CA & de CR, qui ſont égales à GS & SO, & la difference des quarrez de CA & de CR eſt égale au rectangle BR, RA; car AB eſt diviſée en deux également en C : c'eſt pourquoy le

quarré de CD eſt au quarré de RS, comme le quarré de CA au rectangle BR, RA, & *par la* 18. *Propoſition de l Ellipſe*, le point S eſt un des points de l'Ellipſe cherchée, & ainſi de tous les autres points à l'infiny.

## AUTRE MANIERE DE DESCRIPTION PAR LA MESME CONSTRUCTION.

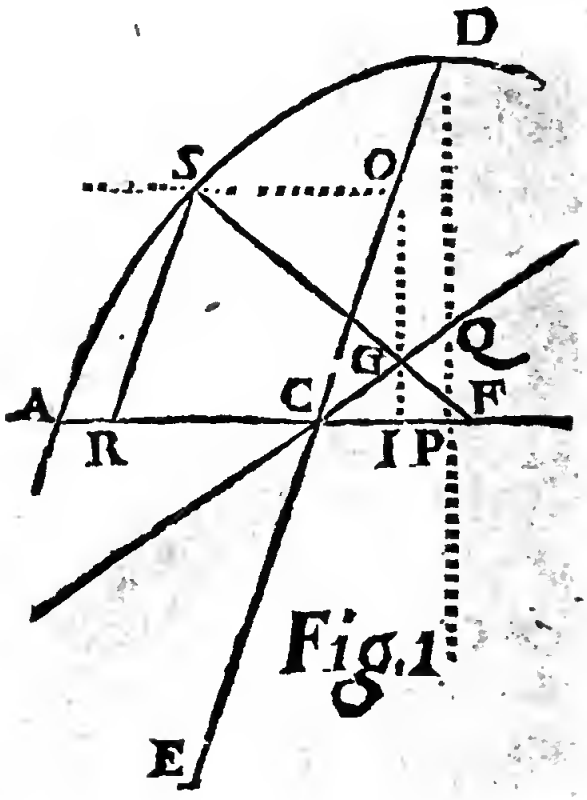
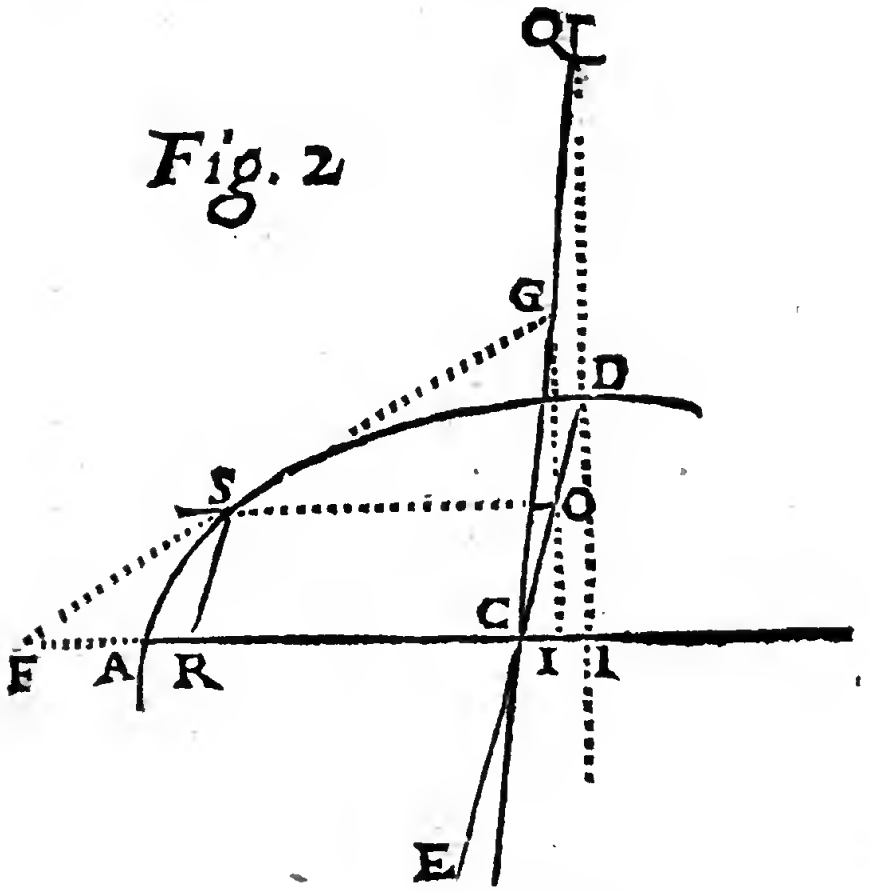


Fig. 1

Ayant trouvé la ligne droite CQ comme cy-dessus ; de quelque point G de la ligne CQ pour centre, & pour demi-diametre GF égale à QP ayant décrit l'arc F coupant CB en F, & ayant prolongé FG en S & ayant fait GS égale à CA. Je dis que le point S est un de ceux de l'Ellipse requise.

*Fig. 2*



## AUTRE MANIERE DE DESCRIPTION PAR LE MOYEN DU CERCLE. *

Si l'on décrit un quart de cercle dont CA ſoit le demi-Diametre ayant joint AD ſi de quelque point R du Diametre CA on éleve la perpendiculaire juſques à la circonference du cercle, cette perpendiculaire ſera moyenne proportionnelle entre BR & RA, & ſi ayant mené RO parallele à AD, on mene OS parallele à CA & égale à la moyenne proportionnelle entre BR, RA. Je dis que le point S eſt à l'Ellipſe requiſe.

*Par la conſtruction* le quarré de CD eſt au quarré de CA, comme le rectangle EO, OD au rectangle BR, RA qui eſt égal au quarré de OS: c'eſt pourquoy le quarré de CD eſt

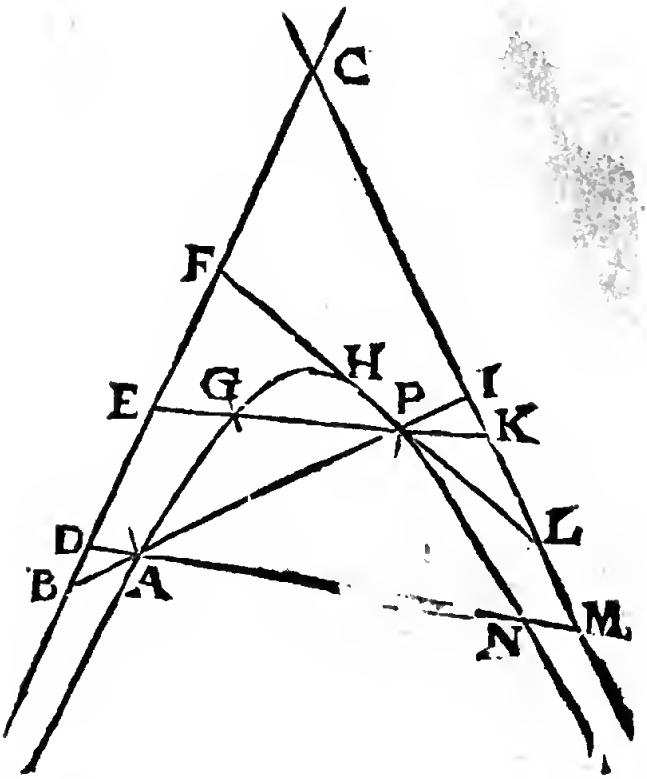
* *On doit ſuppléer dans la figure precedente le cercle & les lignes qui n'y ſont pas, ce qui eſt facile.*

au quarré de CA, ou bien le quarré de ED au quarré de BA, comme le rectangle EO, OD au quarré de OS, & *par la* 18. *propoſ. de l'Ellipſe*, le point S eſt à l'Ellipſe requiſe. *

## PROBLEME V.

*Les Aſymptotes* CD, CM *eſtant données avec un point* P *de l'Hyperbole. Décrire l'Hyperbole.*

* *Remarquez que dans cette ſuppoſition* OS, & CR *ne ſont pas égales, comme marque la Figure.*




Par le point P ſoit mené des lignes comme l'on voudra BPI, EPK, FPL terminées aux Aſymptotes ; ſi l'on fait BA égale à PI, EG égale à PK, FH égale à PL. Je dis que les points A, G, H, ſont à l'hyperbole requiſe.

Cette conſtruction eſt vraye *par la 13. propoſition de l'hyperbole.*

Et ſi par quelqu'un des points trouvez comme A on mene encore dautres lignes comme DM, ayant fait MN égale à DA, il eſt auſſi évident par la meſme raiſon que le point N eſt dans l'hyperbole.

*Fin du Traitté des Sections Coniques.*

# LES
# LIEUX
# GEOMETRIQUES.

*Par Monsieur* DE LA HIRE,
*de l'Academie Royalle des Sciences.*

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë
S. Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXIX.

# LES LIEUX GEOMETRIQUES.

## PREFACE.

J'AVOIS *resolu de donner ce Traitté des Lieux tout simple & le plus en abregé qu'il me seroit possible : mais ayant consideré qu'il falloit expliquer non seulement ce que les Geometres entendent par Lieux, mais aussi comme ils viennent dans l'usage de la Geometrie, j'ay crû qu'il étoit necessaire de prendre la chose dans son Origine, & pour ce sujet j'ay ajoûté le premier Chapitre, où je fais voir de quelle maniere on se doit servir de l'Analyse pour resoudre les Problemes de Geometrie, & je suis*

*perſuadé d'en avoir dit aſſez pour ſervir d'inſtruction à ceux qui ſçavent les premieres Regles de cet Art, que je ne pretens pas expliquer icy. Les exemples que je propoſe ſont tres propres pour exercer ceux qui n'ont pas d'habitude dans ces reſolutions, & ils ſont choiſis en ſorte qu'ils ont chacun quelque choſe de particulier, qui peut ſervir de regle generale dans de pareilles rencontres. Je diviſe les Problemes en deux eſpeces, en déterminez, & indeterminez; les déterminez ſont ceux qui n'ont qu'un certain nombre de reſolutions differentes, comme, par exemple, s'il falloit couper une ligne droite terminée en deux parties, telles que leur rectangle fût égal à un quarré donné; on voit clairement que l'on pourroit trouver deux points ſur cette ligne, qui en feroient la diviſion ſelon qu'il ſeroit requis; mais ſi le côté du quarré donné étoit égal à la moitié de la ligne donnée, il n'y auroit qu'une ſeule ſolution à ce Probleme, car le*

*point qui diviſeroit en deux également la ligne, en feroit la diviſion ſelon qu'il ſeroit requis ; & enfin ſi le coſté du quarré donné étoit plus grand que la moitié de la ligne propoſée, la queſtion ſeroit impoſſible, & ainſi des autres; mais ſi le Probleme eſt indeterminé, il peut avoir une infinité de ſolutions differentes, comme, par exemple, on peut trouver une infinité de lignes droites differentes en longueur, dont les rectangles, étant priſes deux à deux, ſoient égaux à un quarré donné, & ainſi des autres.*

*Dans le ſecond Chapitre apres la définition generale des lieux, je traite de la nature & de la reduction des equations pour ceux qui ſont aux lignes, car ce n'eſt que ces ſortes de lieux que je pretens parler dans cet Ouvrage ; & pour ſoulager l'imagination j'y donne des noms particuliers aux points & aux lignes qui y ont toûjours un même uſage ; & lts ayant diviſez en differens genres, je traitte au*

*long de ceux du premier que je ſubdiviſe en differentes eſpeces en les rapportant tous à de certaines formules, auſquelles on peut reduire tous ceux du meſme genre ; & entre toutes les manieres differentes de reduction, j'en choiſis deux ſeulement qui ſont les plus commodes, & je donne une marque pour connoître à la ſeule veuë de l'Equation propoſée, de quelle reduction l'on doit ſe ſervir pour venir à une conſtruction qui ſoit la plus ſimple pour le lieu propoſé, & à la fin je donne une Regle pour connoître, ſans aucune reduction, à quelle ligne le lieu peut eſtre reduit.*

*Le troiſiéme Chapitre contient la conſtruction des Lieux du premier genre, ou par le moyen de quelques remarques generales, je rends cet Art plus intelligile & plus facile qu'il n'a pas encore été juſqu'à preſent, & puiſque la conſtruction des Lieux contient en partie ce qu'il y a de plus beau dans la Geometrie, il faut ſe la rendre fa-*

*miliere, & l'entendre parfaitement ſi l'on veut parvenir à une connoiſſance entiere de cette Science.*

*Ie ne parle que des Lieux du premier genre, car on ne trouvera rien dans la reſolution ou dans la conſtruction des autres, qui puiſſe donner quelque difficulté, apres que l'on aura bien entendu ce que j'ay dit de ceux du premier. Ie ſçay que ſi on vouloit les mettre en ordre & les diviſer en differentes eſpeces, l'Ouvrage ſeroit tres-grand, quoyque par les combinaiſons differentes des quantitez inconnuës entr'elles, ou avec les connuës, l'on puiſſe en faire le dénombrement, qui pouroit être reduit à un certain nombre de formules pour chaque genre : mais quand on voudroit prendre cette peine, l'utilité que l'on en recevroit ne ſeroit pas conſiderable, puiſque l'on ne demeure point court dans l'occaſion en ſe ſervant de la même methode que pour ceux du premier genre.*

Le caractere ∞ ſignifie Equation ou égalité, par exemple;

$$xx + vx - xa \infty ab.$$

c'eſt à dire que $xx$ plus $xv$ moins $xa$, eſt égal à $ab$; &

$$xx - xb + aa \infty o.$$

c'eſt à dire $xx$ moins $xb$ plus $aa$ égal à rien.

Le ſigne | ſignifie raiſon; & || ſignifie ſimilitude de raiſons : par exemple;

$$a \mid b \parallel xx \mid ab.$$

c'eſt à dire que $a$ eſt à $b$, comme $xx$ à $ab$; &

$$aa \parallel xx \parallel ab.$$

c'eſt à dire que $aa$ eſt à $xx$, comme $xx$ à $ab$, qui eſt la proportion continuë.

On remarquera que je marque toûjours les quantitez inconnuës par les dernieres lettres de l'Alphabet $v$, $x$, $y$, $z$, & les connuës par les autres lettres.

# CHAPITRE I.

## DE LA RESOLUTION DES PROBLEMES DE GEOMETRIE.

LOrſque l'on veut reſoudre quelque Probleme de Geometrie, il faut le conſiderer cõme fait, & mener les lignes que l'on juge les plus propres pour tirer de la ſuppoſition quelque conſequence qui faſſe connoître ce qui n'eſt que ſuppoſé. Une partie de ces lignes eſt connuë par ce qui eſt donné dans la queſtion, & l'autre partie eſt inconnuë, à cauſe que l'on a ſuppoſé pour connû ce qui ne l'eſt pas effectivement. Ayant pris des caracteres particuliers pour marquer chacune de ces lignes tant connuës qu'inconnuës, il faut les comparer les unes aux autres ſuivant qu'elles ſe trouvent diſpoſées, pour exprimer une meſme quantité en

deux manieres differentes, qui eſt ce qu'on appelle Equation; & ſi le Probleme eſt déterminé de ſa nature, c'eſt à dire s'il n'a qu'un certain nombre déterminé de ſolutions differentes, l'on doit toûjours trouver autant d'Equations que l'on aura poſé de lignes inconnuës differentes, & par ce moyen dans quelqu'une des Equations on poura ſuprimer toutes les inconnuës hormis une ſeule dont on connoîtra la valeur par raport aux quantitez connuës de l'Equation, & c'eſt ce qui fait connoître que le Probleme eſt déterminé; car ſi cette inconnuë n'a qu'une dimenſion dans l'Equation, on ne peut exprimer ſa valeur que d'une ſeule façon; ſi elle en a deux, on la peut exprimer en deux façons differentes, & ainſi de ſuite. Mais s'il eſt impoſſible de trouver autant d'Equations que l'on a ſuppoſé d'inconnuës, le Probleme ſera indéterminé; car l'on poura ſuppoſer telle ligne que l'on voudra hor-

mis une, dont on cherche la valeur par rapport aux autres ſuppoſées & aux lignes connuës, pourveu qu'elles n'excedent pas de certains termes entre leſquels elles ſe trouvent renfermées par les quantitez connuës, & l'on peut toûjours faire cette ſuppoſition de lignes, puiſqu'il n'y a aucune Equation qui les détermine, & changeant la grandeur des inconnuës ſuppoſées, l'inconnuë reſtante changera auſſi de grandeur, car l'Equation demeure toûjours la meſme : c'eſt pourquoy le Probleme peut avoir un nombre indéterminé de ſolutions differentes, & c'eſt ce qui le fait nommer indéterminé. Il arrive ſouvent que les comparaiſons que l'on fait d'abord des lignes connuës & des inconnuës que l'on a poſées, conduiſent à une Equation plus compoſée qu'il n'eſt neceſſaire pour la reſolution du Probleme : c'eſt pourquoy il faut faire differentes poſitions de lignes pour tâcher de parvenir à une

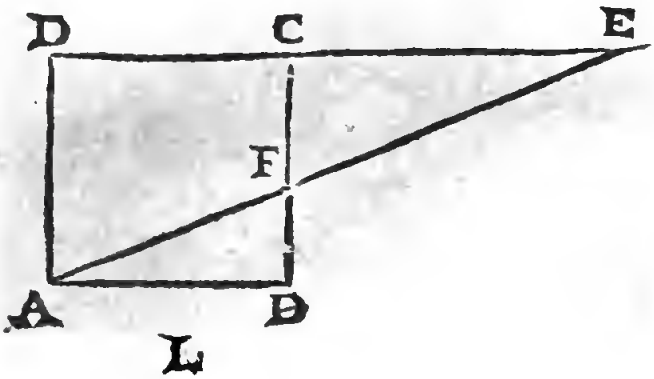
Equation ſimple s'il eſt poſſible, ce qui arriverà ordinairement ſi le Probleme eſt ſimple de ſa nature; mais ſi l'on ne veut pas tenter toutes ces voyes differentes, on peut reconnoître ce qu'il eſt, en ſe ſervant de la premiere venuë des Equations, en la reduiſant à de certains termes, & la diviſant & transformant s'il eſt neceſſaire, comme il eſt enſeigné fort au long dans les Elemens de cette Science, ce que je n'entreprens pas de repeter icy, où je ne fais que propoſer quelques Problemes pour exemple tant des déterminez que des indéterminez, afin de faire connoître la methode dont je me ſers pour venir aux Equations, & aprés cela pourſuivre mon deſſein. Mais avant que d'aller plus loin. il faut que j'avertiſſe icy que l'on doit bien prendre garde que toutes les quantitez qui déterminent les conditions de la queſtion, ſoient employées dans l'Equation, car autrement on n'auroit ſatisfait qu'en

partie au Probleme propoſé ; ce qui arrive aſſez ſouvent en calculant ; & qu'on ne doit pas exprimer une même quantité par deux caracteres differens.

## PREMIER EXEMPLE D'UN PROBLEME DETERMINE'.

*Un quarré* AC *eſtant donné, il faut mener de l'un des angles* A *la ligne droite* AE, *en ſorte que la partie* FE *compriſe entre le coſté* DC *prolongé en* E, *& entre le coſté* CB, *ſoit égale à une ligne droite donnée* L.

Suppoſant la choſe faite, je marque la ligne AB, ou ſes égales AD, DC, BC, du caractere *a* ce que j'écris en cette ſorte AB ∞ *a*. La ligne L ou ſon égale ſuppoſée FE ∞ *b*, qui ſont les deux ſeules lignes que je puiſſe connoître dans cette queſtion; & entre les inconnuës qui y ſont, je choiſis CF & AF avec leſquelles je croy pouvoir venir plus aiſément aux Equations, & je fais AF ∞ *x*. & CF ∞ *z*.




Maintenant je conſidere que les triangles ABF, ECF, EDA ſont ſemblables & rectangles: c'eſt pourquoy

pour avoir la valeur de CE dont je puis avoir besoin dans l'Equation, je dis comme AF a AB, ainsi FE a CE, ce qui est en termes Analytiques $x \mid a \parallel b \mid \frac{ba}{x}$ que je trouve égale à EC, & j'écris $EC \propto \frac{ba}{x}$.

Pour venir aux Equations, je voy qu'à cause des triangles semblables EF est à CF, comme EA à AD, ce qui est en termes Analytiques $b \mid z \parallel b+x \mid a$, & le produit des termes moyens de cette proportion estant égal au produit des extremes, on a $zb+zx \propto ba$ ; ce qui est une Equation.

Et pour reconnoître si le Probleme est déterminé, je cherche encore une autre Equation, à cause que j'ay pris deux inconnuës, & je trouve que le quarré de EF est égal aux deux de CE & de CF, ce qui est en termes Analytiques $bb \propto zz+\frac{aabb}{xx}$, ce qui

eſt une ſeconde Equation differente de la premiere, & c'eſt ce qui montre que le Probleme eſt déterminé de ſa nature; car par le moyen de l'une de ces Equations, je fais ſortir de l'autre l'une des deux inconnuës, afin qu'il n'y en reſte qu'une qui détermine la queſtion.

Je diviſe donc dans cet exemple, la premiere Equation trouvée par $b+x$, & il viendra $z \propto \frac{ba}{b+x}$, dont le quarré ſera $\frac{bbaa}{bb+2bx+xx} \propto zz$. Et dans la ſeconde Equation à la place de $zz$ mettant ſa valeur trouvée par le moyen de la premiere, il viendra la ſuivante $bb \propto \frac{bbaa}{bb+2bx+xx} + \frac{aabb}{xx}$ qui eſtant miſe en ordre par les multiplications & tranſpoſitions, donnera $x^4+2bx^3+bbxx-2aaxx-2aabx-aabb \propto o$, qui eſt une Equation déterminée à cauſe qu'il n'y a qu'une inconnuë,

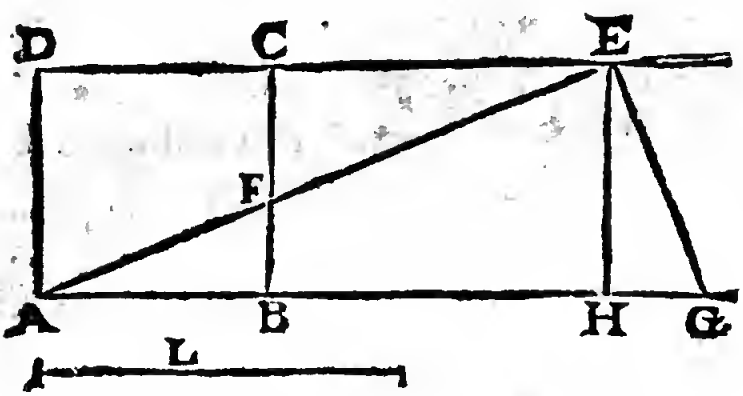
connuë, laquelle monte juſques au quatriéme degré : mais auparavant que de chercher une autre voye pour venir à une Equation plus ſimple s'il eſt poſſible, c'eſt à dire où la quantité inconnuë ne monte pas ſi haut, je veux faire voir qu'il n'eſt pas toûjours neceſſaire de prendre deux ou pluſieurs inconnuës pour venir à une Equation déterminée, puiſqu'on le peut faire avec une ſeule.

Je prends ſeulement l'inconnuë BF $\propto v$, & j'aurai CF $\propto a - v$, car CB eſt poſé $\propto a$ : & comme CF eſt à FE, ainſi FB à FA, j'aurai donc

FA $\propto \frac{bv}{a-v}$ : mais le quarré de FA eſt égal aux deux quarrez de AB & de BF, ce qui donne l'Equation

$\frac{bbvv}{aa-2av+vv} \propto aa+vv$, qui étant miſe en ordre ſera $v^4 - 2av^3 + 2aavv - bbvv - 2a^3v + a^4 \propto o$, qui eſt une Equation déterminée, mais dans la-

quelle l'inconnuë $v$ a comme dans la precedente, quatre dimenſions, c'eſt pourquoy elle n'eſt pas plus ſimple.

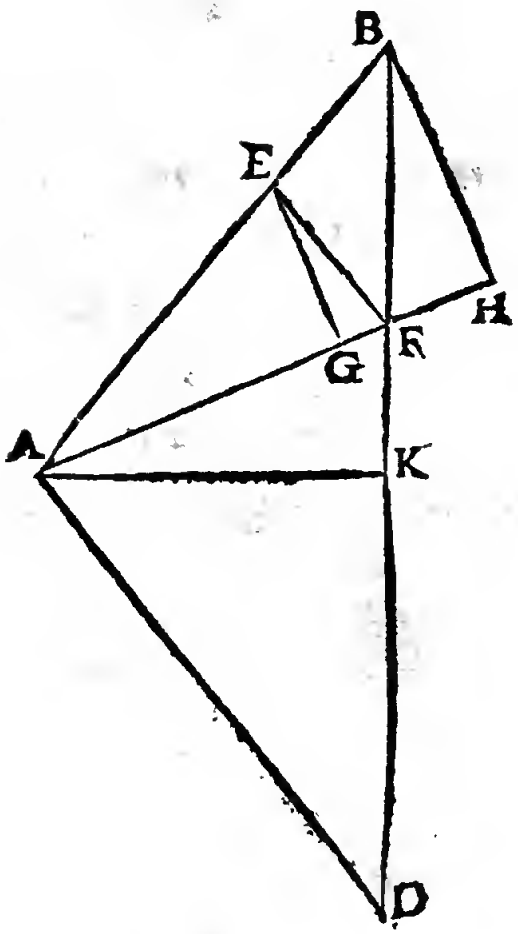



Cherchons maintenant quelqu'autre Equation pour voir ſi le Probleme propoſé n'eſt pas plus ſimple de ſa nature que nous le venons de trouver: & pour cet effet tirons du point E la ligne droite EG perpendiculaire à AE qui rencontre AB prolongée en G. Il eſt évident que EG eſt égale à AF, car ayant mené EH perpendiculaire à AG, le triangle EHG eſt égal & ſemblable au triangle ABF, & le côté EG de l'un eſt égal au côté AF homologue de l'autre.

Soit donc comme auparavant AB ∞ *a*., FE ∞ *b* qui ſont les deux connües, & AF ou EG ſon égale ∞ *x*, & BG ∞ *y* qui ſont deux inconnuës. A cauſe du triangle rectangle AEG, le quarré de AG eſt égal aux deux quarrez de AE & de EG, ce qui donne en termes Analytiques l'Equation $aa+2ay+yy \propto xx+xx+2bx+bb$. Et à cauſe des triangles ſemblables ABF, AEG ; AB eſt à AF, comme AE à AG, ce qui eſt $a \mid x \parallel x+b \mid a+y$, d'où l'on tire l'Equation $aa+ay \propto xx+xb$, & à la place de $xx+xb$ dans la premiere Equation, ſubſtituant ſa valeur que nous venons de trouver dans cette ſeconde, il viendra la ſuivante, où il n'y aura qu'une quantité inconnuë $aa+2ay+yy \propto 2aa+2ay+bb$ qui ſe réduit à $yy \propto aa+bb$, qui eſt une Equation des plus ſimples que l'on puiſſe trouver ; car la quantité inconnuë n'y a que deux dimenſions, c'eſt pourquoy il ſeroit inutile d'en chercher une autre.

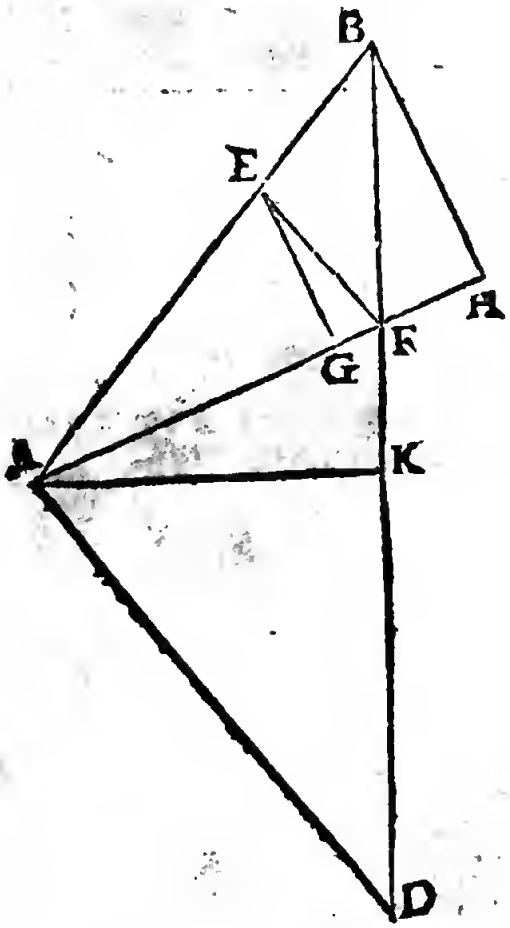
## SECOND EXEMPLE D'UN PROBLEME DETERMINE'.

*Il faut décrire le triangle* AEF, *dont la ſomme* AB *des deux côtez* AE, EF *eſt donnée, l'angle* AEF *compris par ces mêmes côtez, & la perpendiculaire* EG *menée du ſommet* E *de cet angle au côté oppoſé* AF.




Je conſidere le Probleme comme fait ; & ayant prolongé AE en B, en ſorte que AB ſoit égale à la ſomme donnée des deux côtez AE EF, la ligne EB ſera égale à EF, & tirant AD parallele à EF & égale à AB, la ligne

BD paſſera en F, car BE eſt à EF, comme BA à AD, & AD & EF ſont paralleles. Ayant diviſé BD en deux également en K, & mené AK ſoit prolongé AF en H, & tiré BH, EG perpendiculaires à AF, dont la ligne EG eſt donnée.



Soient AK $\propto d$, EG $\propto b$, BK $\propto c$, qui ſont trois lignes connuës, & AF $\propto z$, FK $\propto x$, BH $\propto v$, qui ſont trois inconnuës.

A cauſe des paralleles BH, EG; BH eſt à EG, comme AB à AE; & à cauſe des paralleles AD, EF, AB eſt à AE, comme DB à DF; en raiſon égale BH eſt à EG, comme DB à DF, ce qui eſt en termes Analytiques $v \mid b \parallel 2c \mid c+x$, d'où vient l'Equation $2bc \propto vc+vx$, ou bien $\frac{2bc}{c+x} \propto v$.

Les triangles BHF, AKF, ſont ſemblables, car les angles BHF, AKF ſont droits, & les angles BFH, AFK ſont oppoſez au ſommet; c'eſt pourquoy AF eſt à BF, comme AK à BH, ce qui eſt en termes Analytiques $z \mid c-x \parallel d \mid v$, d'où l'on tire la ſeconde Equation $zv \propto cd - xd$.

Enfin le quarré de AF eſt égal aux deux quarrez de AK & FK; car

le triangle AKF eſt rectangle, d'où vient une troiſiéme Equation $zz \propto dd - xx$, ou bien $zz - dd \propto xx$.

Ce Probleme eſt donc déterminé, puiſque nous avons trouvé autant d'Equations differentes que nous avions poſé d'inconnuës differentes; & ſi dans la ſeconde Equation à la place de $v$, on met ſa valeur trouvée dans la premiere, il en vient une autre $\frac{2bcz}{c+x} \propto cd - xd$, qui ſe réduit à $2bcz \propto ccd - xxd$.

Et à la place de $xx$ de celle-cy, mettant ſa valeur trouvée dans la troiſiéme, il en vient une autre où il ne reſte qu'une ſeule quantité inconnuë $2bcz \propto ccd - zzd + d^3$, qui étant miſe en ordre ſe réduit à

$$zz + \frac{2bc}{d} z \propto cc + dd.$$

& ſi l'on veut encore la réduire, l'on a le triangle ABK qui eſt rectangle, c'eſt pourquoy ſi l'on fait $AB \propto a$, on

aura $aa \propto cc + dd$, & dans l'Equation $zz + \frac{2bcz}{d} \propto aa$.

Ce Probleme déterminé eſt donc plan de ſa nature, puiſque la quantité inconnüe n'y monte que juſques au quarré, qui ſont des plus ſimples que l'on puiſſe trouver, & ſi l'on avoit pris un autre chemin pour venir à l'Equation, on en auroit trouvé une dont l'inconnüe n'auroit eu que quatre & deux dimenſions dans tous les termes de l'Equation où elle ſe ſeroit rencontrée, qui eſt une eſpece des Problemes plans, mais qui ſont un peu plus compoſez dans leur conſtruction, comme je ferai voir dans le Traitté de la Conſtruction des Equations.

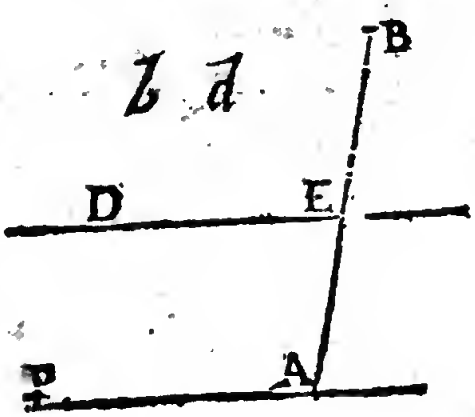
Je conſidere la choſe comme faite, & puiſque les lignes PA, DE ſont paralleles & données de poſition, la ligne EA eſt auſſi donnée. Soit donc EA ∞ *a*, qui eſt la ſeule ligne connuë de cette Equation, & EB ∞ *x*, PA ∞ *y* qui ſont deux inconnuës.

Par ce qui eſt requis dans la queſtion on a l'Equation *ya* ∞ *xx*, où il y a deux inconnües, & il eſt impoſſible d'en trouver encore une autre pour faire ſortir une des inconnües de l'une des deux Equations, c'eſt ce qui montre que le Probleme eſt indeterminé, & je puis prendre au lieu de PA une autre ligne P*a*, & en trouver une autre *be*, en ſorte que ſon quarré ſoit égal au rectangle de P*a*, *ea*, & ainſi à l'infini.

# SECOND EXEMPLE

## D'UN PROBLEME INDETERMINÉ.

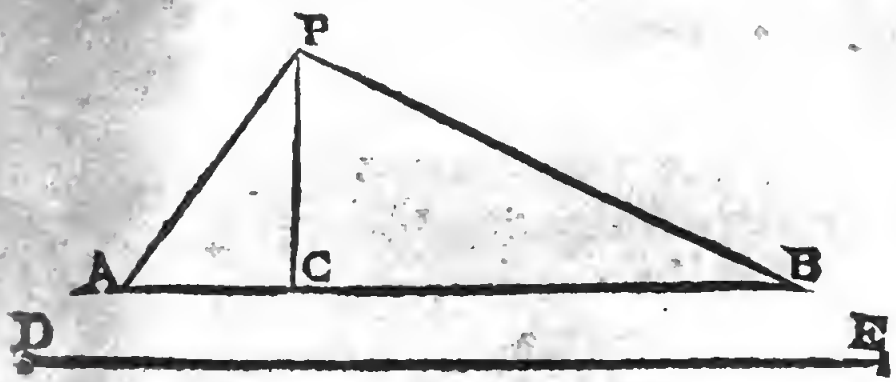
*Les deux lignes droites* PA, DE *paralleles entr'elles, ſont données de poſition & ſur* PA *le point* P. *Il faut trouver* BE, *faiſant avec* DE *un angle égal à un angle donné, & eſtant prolongée juſques à la ligne* PA *en* A, *le quarré de* BE *ſoit égal au rectangle de la ligne* PA *avec une ligne qui ſoit à* PA, *comme* b *à* d.



Conſiderant la choſe comme faite, & faiſant PA $\propto y$, & BE $\propto x$, qui ſont deux inconnües, on aura l'autre côté du rectangle requis $\propto \frac{by}{d}$, & une Equation $xx \propto \frac{yyb}{d}$, où il y a deux inconnües, & comme il eſt impoſſible d'en trouver une autre, il s'enſuit que le Probleme eſt indeterminé, & que l'on peut trouver une infinité de lignes BE, qui ſatisferont à la queſtion.

## TROISIE'ME EXEMPLE D'UN PROBLEME INDETERMINE'.

*Les deux points* A *&* B *eſtant donnez de poſition ſur un plan. Il faut trouver le point* P, *en ſorte que les lignes* AP, PB *priſes enſemble, ſoient égales à la ligne droite donnée* DE.




Je conſidere la choſe comme faite; & ayant joint les points AB, & du point P ayant mené PC perpendiculaire à AB. Soit AB ∞ *a*, DE ∞ *d*, qui ſont les deux ſeules connües dans

cette queſtion, & AC $\propto x$, CP $\propto y$, qui ſont deux inconnües.

Pour venir à une Equation, je connois que la racine du quarré de AC joint au quarré de CP, eſt la ligne AP, & de meſme que la racine du quarré de CB joint au quarré de CP eſt PB, & que ces deux racines enſemble AP, PB, doivent eſtre égales à DE donnée, c'eſt ce qui eſt en termes Analytiques

$\sqrt{xx+yy}+\sqrt{aa-2ax+xx+yy} \propto d$, & tranſpoſa

$\sqrt{aa-2ax+xx+yy} \propto d - \sqrt{xx+yy}$, & multipliant chaque partie de cette Equation par ſoy-même, ce qui ne change pas l'Equation, pour en ôter les ſignes radicaux, on a

$aa-2ax+xx+yy \propto dd - 2d\sqrt{xx+yy}+xx+yy$, tranſpoſant & ôtant les termes qui ſe détruiſent, & diviſant par $2d$ on a

$\sqrt{xx+yy} \propto \frac{dd-aa+2ax}{2d}$ & mul-

tipliant encore par ſoy-même chaque partie de cette derniere Equation, on a $xx + yy \propto \frac{d^4 - 2ddaa + 4ddax + a^4 - 4a^3x + 4aaxx}{4dd}$ & multipliant cette Equation par $4dd$ & tranſpoſant on a $4ddxx - 4aaxx \propto d^4 - 2ddaa + a^4 + 4ddax - 4a^3x - 4ddyy$, & cette Equation étant diviſée par $4dd - 4aa$, on a

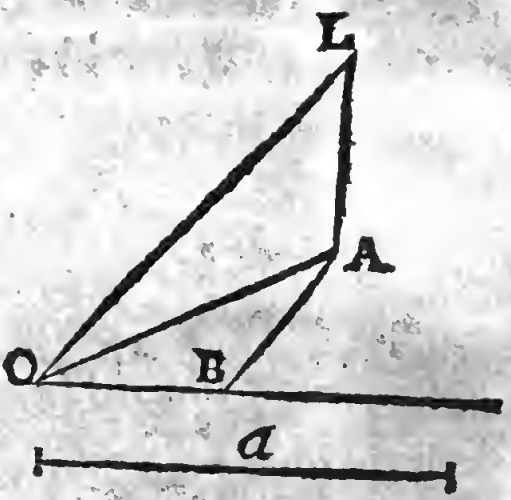
$$xx \propto \frac{1}{4}dd - \frac{1}{4}aa + ax - \frac{ddyy}{dd - aa}$$

& comme on ne peut trouver que cette ſeule Equation, il s'enſuit que le Probleme eſt indeterminé, & que l'on peut avoir une infinité de points, comme P.

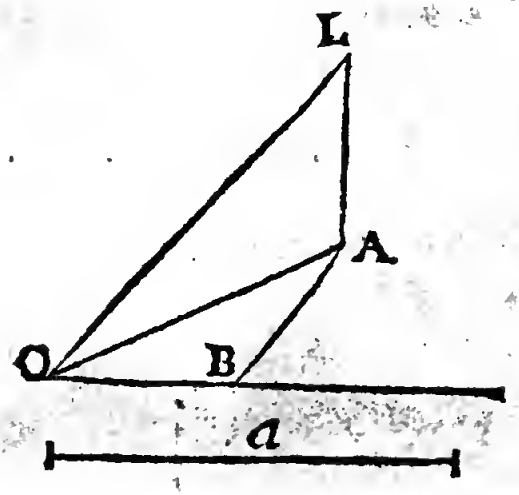
# QUATRIE'ME EXEMPLE

## D'UN PROBLEME INDETERMINE'.

*La ligne droite* OB *indeterminée vers* B, *eſtant donnée ſur un plan, & un point* O *ſur cette ligne. Il faut trouver le paint* L *hors de ce plan, en ſorte que ſi l'on mene* LB *perpendiculaire à* OB, *la partie* OB *avec une ligne droite donnée* a, *ſoit égale à* OL.



Je considere d'abord que pour déterminer un point hors d'un plan, à l'égard d'une ligne droite donnée sur ce plan, il faut trois conditions : la premiere, est la grandeur de la perpendiculaire LA menée du point L au plan; la seconde, la perpendicu-




laire AB menée du point A à la ligne donnée OB; & la troisiéme, la partie OB de cette ligne compriſe entre un de ſes points O & la rencontre B: c'eſt pourquoy je fais OB ∞ *x*, AB ∞ *y*, LA ∞ *v*, qui ſont trois inconnües, & la connüe *a*.

A cauſe des angles droits LAB, ABO, & par conſequent LBO, OL, ſera égale à la racine des trois quarrez de LA, AB, & BO enſemble ; mais OL doit être égale à OB plus *a*, c'eſt pourquoy en termes Analytiques, on a l'Equation $a+x \propto \sqrt{xx+yy+vv}$, & pour ôter le ſigne radical, multipliant par ſoy-même chaque partie de l'Equation, on a $aa+2ax+xx \propto xx+yy+vv$, qui ſe réduit à $aa+2ax \propto yy+vv$ ; & comme il n'y a pas moyen de trouver d'autres Equations pour faire évanoüir quelques-unes des inconnües, il s'enſuit que le Probleme eſt indeterminé.

On remarquera que dans les trois premiers exemples des Problemes indeterminez, il n'y manquoit qu'une condition pour les determiner, mais dans le quatriéme il en manque deux.

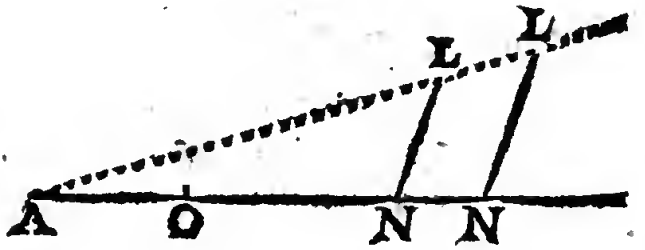
On pouroit peut-être s'étonner de ce que j'ai propoſé les deux premiers

## CHAPITRE II.

### DE LA NATURE DES LIEUX, ET DE LA REDUCTION DES EQUATIONS POUR LA CONSTRUCTION DES LIEUX.

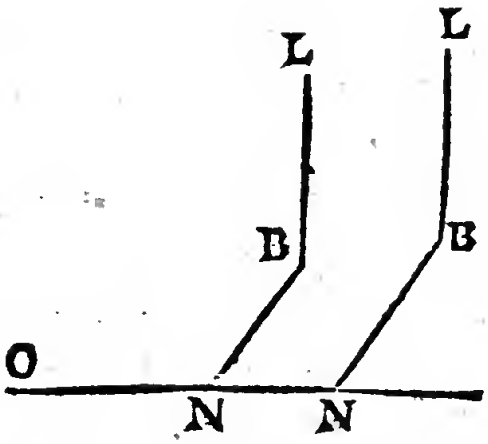
### DEFINITION I.

ON appelle LIEU GEOMETRIQUE toute ligne droite ou courbe, ou ſuperficie, &c. dont tous les points ont un même rapport aux points d'une même ligne droite, à l'égard de l'un de ſes points.




La ligne LL ſera un lieu ſi l'on peut mener de tous ſes points des lignes

LN, LN paralleles entr'elles, qui rencontrent une ligne droite AN, & ayant pris ſur la ligne AN un point A à volonté, chaque ligne LN ait un même rapport à la partie AN qu'elle fait par ſa rencontre : par exemple, ſi la ligne LL eſt droite, & qu'elle rencontre la ligne droite AN en A, il eſt évident que chaque ligne droite LN a un même rapport à chaque partie AN, ou bien ſi au lieu du point A on avoit pris le point O, chaque ligne LN auroit un même rapport à chaque ligne ON, en luy adjoûtant OA, ce qui s'exprime en termes Analytiques toûjours par la même Equation, ayant marqué l'indéterminée ou inconnuë ON $\propto y$, & l'autre NL $\propto x$, & la partie OA $\propto a$, par quel point que ce ſoit de la ligne AL que l'on mene LN, on aura l'Equation $da + dy \propto bx$, où $b$ & $d$ marquent la raiſon qu'il y a de AN à NL.




De même pour connoître le rapport des points LL d'une ſuperficie aux points d'une ligne droite ON, il faut mener par la ligne ON un plan ONB, & de chaque point L de la ſuperficie, les lignes LB paralleles entr'elles juſques au plan, & des lignes BN auſſi paralleles entr'elles juſques à ON : mais ce n'eſt pas mon deſſein de parler icy de ces ſortes de Lieux.

## DEFINITION 2.

Dans la premiere Figure de la Définition precedente, le point O qui

eſt l'extrêmité commune de toutes les parties ON, eſt appellé l'ORIGINE du Lieu.

3.

La ligne ONN, la TIGE.

4.

Les points N, les NEUDS.

5.

Les lignes LN paralleles entr'elles, & menées du Lieu à la Tige, les RAMEAUX.

Je diviſe les Lieux en differens genres, ſuivant les differens degrez où montent les quantitez inconnuës dans les Equations, & je comprens ſous le premier tous ceux dans les Equations deſquels les quantitez inconnuës jointes enſemble, ou priſes ſeparément dans chaque terme de l'Equation, ne ſurpaſſent pas le quarré ou le plan; ſous le ſecond où elles n'excedent pas le quarré-quarré; ſous le troiſiéme les quarrez de Cubes, & ainſi de ſuite.

Chaque genre ſe diviſe en differentes

rentes eſpeces, que l'on peut diſtinguer par des Formules generales, auſquelles ſe peuvent réduire tous les lieux propoſez d'un même genre.

## FORMULES DES EQUATIONS DES LIEUX DU PREMIER GENRE.

1.

$\frac{ax}{b} \propto y$, ou bien ſi $a$ & $b$ ſont égales, $x \propto y$, qui eſt un lieu à la ligne droite.

2.

$ax \propto yy$, qui eſt un lieu à la Parabole.

3.

$xy \propto aa$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

4.

$\frac{axx}{b} \propto dd - yy$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe, ou bien ſi $a$ eſt égale à $b$ $xx \propto dd - yy$ qui eſt un lieu au cercle, ou bien à l'Ellipſe, ſi l'angle compris par les inconnuës n'eſt pas droit.

5.

$\frac{axx}{b} \propto yy - dd$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole, ou bien ſi $a$ eſt égale à $b$, $xx \propto yy - dd$ qui eſt un lieu à l'Hyperbole équilatere, qui a tous ſes Diametres égaux à leurs Parametres, & qui a auſſi les Aſymptotes à angles droits.

On doit remarquer que ce premier genre a de deux ſortes de lignes, de droites, & de courbes, ce que les autres n'ont pas étant toutes courbes.

De plus qu'il n'y a que trois lignes courbes du premier genre, la Parabole, l'Ellipſe qui comprent le cercle, & l'Hyperbole qui a auſſi l'hyperbole équilatere qui correſpond au cercle.

Il ne ſera pas difficile de trouver toutes les Combinaiſons differentes des quantitez inconnuës entr'elles, & avec les connuës, dans les autres genres, & les ſubdiviſer en differentes eſpeces auſquelles ſe peuvent ré-

duire toutes les Equations qui leur appartiennent, comme j'ai fait dans le premier.

## DE LA REDUCTION DES EQUATIONS DES LIEUX DU PREMIER GENRE.

Lorſqu'on eſt venu à une Equation, il faut d'abord examiner ſi elle ne peut point être diviſée par quelque Binome qui contienne une de ſes racines, ce qui la déprimeroit ou réduiroit à moins de termes & beaucoup plus ſimples ; aprés cela il la faut réduire aux moindres termes qu'elle puiſſe être, ſi elle ne l'eſt pas de ſa nature.

Entre les manieres differentes dont on peut faire la reduction d'une Equation, j'en choiſis deux ſeulement dont je me ſers ſuivant la differente forme de l'Equation propoſée. La premiere eſt celle qui fait évanoüir le ſecond terme d'une Equation, en

augmentant ou diminuant la valeur des Racines, en ſorte que dans les lieux du premier genre où les quantitez inconnuës montant au ſecond degré, ſont encore affectées ſous leurs racines, on les réduit au quarré ſeulement des inconnuës que l'on a introduites à la place de celles qui y étoient auparavant ; ce que je ferai voir dans les exemples ſuivans. La ſeconde maniere dont je me ſers ſeulement lorſque les quantitez inconnuës ſont jointes enſemble dans un des termes de l'Equation, & qu'une ſeule des mêmes quantitez y monte au quarré, quoy que la premiere y puiſſe ſervir auſſi, mais elle conduit à une Conſtruction plus compoſée que celle-cy, c'eſt de prendre une quantité inconnuë égale à celle qui monte au quarré plus ou moins celles avec qui elle eſt jointe dans les autres termes, & l'Equation ſe réduit au rectangle des deux inconnües égal à un plan connu : mais ſi l'inconnüe qui

ne monte point au quarré, eſt encore jointe à quelque quantité connüe dans un des termes, il faut d'abord prendre une inconnüe égale à l'inconnüe qui monte au quarré plus ou moins la quantité connüe qui eſt jointe avec l'autre inconnüe, & l'ayant miſe à ſa place dans l'Equation, on en prend encore une autre égale à celle qui eſt déja priſe plus ou moins les autres quantitez avec qui elle eſt jointe, & enfin le lieu eſt réduit en telle ſorte que les deux quantitez inconnües ſe trouvent ſeulement dans un des termes, & ce qui ſe verra par les Exemples.

## EXEMPLE
### DE LA PREMIERE MANIERE DE REDUCTION.

Soit l'Equation propoſée

$$yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto dx - xx + ee.$$

Je prens l'inconnuë $z \propto y + \frac{bx}{a} - c$,

ce qui me donne $y \propto z - \frac{bx}{a} + c$, & mettant dans l'Equation propoſée cette valeur trouvée à la place d'$y$, & ſon quarré à la place d'$yy$, j'ai l'Equation ſuivante

$$zz \propto \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - xx + dx + cc + ee,$$

& multipliant tout par $aa$, & puis diviſant par $bb - aa$, ſi $b$ eſt plus grande que $a$, ſinon aprés la multiplication, tranſpoſant les termes d'un côté dans l'autre, & aprés diviſant par $aa - bb$, comme en cet Exemple.

on a $xx$ ſans fraction dans la ſuivante Equation

$$\frac{-aazz}{aa-bb} \propto xx + \frac{2bcax-daax}{aa-bb} - \frac{ccaa-eeaa}{aa-bb},$$

& poſant $h$ connuë $\propto \frac{bca-daa}{aa-bb}$ pour abreger les termes & le calcul, je prens encore comme auparavant $v \propto x+h$, ce qui donne $x \propto v-h$, & poſant dans l'Equation à la place de $x$ & de $xx$ ſa valeur, il viendra l'Equation ſuivante

$$\frac{aazz}{aa-bb} \propto hh + \frac{ccaa+eeaa}{aa-bb} - vv$$

Maintenant ſi je fais que $r$ ſoit à $ſ$, comme $aa-bb$ à $aa$, il viendra au lieu de l'Equation precedente

$$\frac{ſzz}{r} \propto hh + \frac{ſcc+ſee}{r} - vv$$

(car $\frac{ſzz}{r}$ ſera $\propto \frac{aazz}{aa-bb}$ & $\frac{ſcc+ſee}{r} \propto \frac{ccaa+eeaa}{aa-bb}$) Enfin pre-

nant la quantité connuë $mm \propto hh + \frac{ſcc + ſee}{r}$, on aura l'Equation $\frac{ſzz}{r} \propto mm - vv$, qui eſt réduite à la Formule 4. qui eſt un lieu à l'Ellipſe.

## 1. EXEMPLE
### DE LA SECONDE MANIERE DE REDUCTION.

Soit l'Equation propoſée $yy - xy \propto aa$, je prens $z \propto y - x$, & je la poſe à leur place; ce qui me donne l'Equation toute réduite $yz \propto aa$, qui eſt un lieu aux Aſymptotes réduit à la 3. Formule.

## 2. EXEMPLE DE LA SECONDE MANIERE DE REDUCTION.

Soit l'Equation proposée $xy+xx-bx-ay \propto ab$ ; je prens $z \propto x-a$, ce qui donne $x \propto z+a$, & mettant cette valeur à la place de $x$, & celle de son quarré à la place de $xx$, on a $zy+zz+2az-bz+aa \propto 2ab$, & je prens encore $v \propto y+z+2a-b$, que je pose à leur place dans l'Equation, ce qui la reduit à $zv \propto ab-aa$, & prenant $mm \propto ab-aa$, on a $zv \propto mm$, qui est un lieu aux Asymptotes, suivant la 3. Formule.

On remarquera que cette 2. Reduction ne me sert que pour réduire un lieu qui est à l'Hyperbole à ses Asymptotes, ce qui est toûjours plus simple, car les Asymptotes d'une Hyperbole, sont des Diametres qui

n'ont point de Parametres, & des Touchantes tout enſemble.

---

## REGLE

*Pour connoître à quelle Formule ſe peut reduire une Equation, ſans en faire la reduction.*

L'Equation ayant eſté diviſée, ſi elle le peut être, lorſque les quantitez inconnuës ſont ſeules dans les termes de l'Equation, & qu'elles n'ont qu'une dimenſion de quelle maniere qu'elles puiſſent être jointes aux connuës, le lieu eſt toûjours à la ligne droite ſuivant la 1. Formule.

Si dans les termes de l'Equation l'une des inconnuës monte au quarré l'autre n'ayant qu'une dimenſion dans les autres termes, ou bien ſi ayant auſſi deux dimenſions elle eſt jointe à l'autre dans quelqu'autre terme, en ſorte que l'on peut juger que par la

reduction de la premiere, il viendra le quarré de la ſeconde, qui ſera affecté des mêmes ſignes dans chaque partie de l'Equation, qui pour lors ſe détruiront l'un l'autre, comme par exemple $yy+2xy \propto ax-xx$, on voit qu'en faiſant la reduction de $y$, ayant pris $z \propto y+x$, l'Equation ſe doit réduire à $zz-xx \propto ax-xx$, où $xx$ eſt détruit ; c'eſt pourquoy le lieu eſt toûjours à la Parabole ſuivant la 2. Formule.

Si dans l'Equation propoſée chaque inconnuë y monte au quarré, & l'une étant dans une des parties de l'Equation, & l'autre dans l'autre, elles ſoient affectées de ſignes contraires, de quelle maniere que leurs Racines puiſſent être jointes avec les connuës, pourvû qu'elles ne le ſoient pas entr'elles, ou ſi elles le ſont, que par la réduction de l'une d'un côté, l'autre ne ſoit pas entierement détruite, le lieu ſera à l'Ellipſe ou au Cercle ſuivant la 4. Formule.

Enfin toutes les autres manieres de Combinaiſons des inconnuës, qui ne ſont pas exprimées icy, montrent que le lieu eſt à l'Hyperbole.

Quoy que l'on puiſſe toûjours réduire un lieu à l'Hyperbole, a ſes Aſymptotes, ce n'eſt pas dans tous les cas la voye la plus courte pour la conſtruction, & lors qu'elle le peut être, on le connoîtra à la marque que j'en ay donnée cy-devant.

# CHAPITRE III.

## DE LA CONSTRCTION DES LIEUX.

### AVERTISSEMENT.

DANS les Reductions que je fais des Equations propoſées aux Formules des Lieux du Chapitre precedent, je ne m'oblige pas qu'il y ait les mêmes caracteres, il ſuffit que le nombre des termes y ſoit égal avec les mêmes ſignes, & que les quantitez connuës & inconnuës y gardent les mêmes dimenſions. Je ne pretens pas non plus que les parties de la Tige & les Rameaux ſoient toûjours marquez d'un caractere qui leur ſoit particulier, ce qui ne peut donner que de la peine ſans aucune utilité, puis qu'auſſi-bien l'on peut toûjours changer les parties de la Tige en Rameaux,

& les Rameaux en parties de la Tige, ſans changer en aucune façon l'Origine, les Neuds, ny le Lieu.

Dans les Exemples de la Conſtruction des Lieux, je marque toûjours le Lieu par les lettres L. & *l*.

L'Origine du lieu requis par la lettre O.

Ses Neuds par N & *n*.

Sa Tige & ſes parties par ON & O *n*.

Ses Rameaux par NL, *n l*.

L'Origine du lieu réduit par A, pourvû qu'elle ne ſoit la même que celle du lieu requis.

Sa Tige par A *n*, AN ou AB.

Ses Neuds par *n*, N ou B.

Ses Rameaux par *n l*, NL, B *l* ou BL.

On remarquera que dans le lieu à la ligne droite, l'origine du lieu réduit eſt toûjours la rencontre du lieu avec la tige, qui eſt auſſi toûjours commune au lieu requis & au lieu réduit.

Dans la Parabole, l'origine du lieu

réduit eſt l'extrêmité d'un diametre qui en eſt la tige, & dont les ordonnées ſont les rameaux.

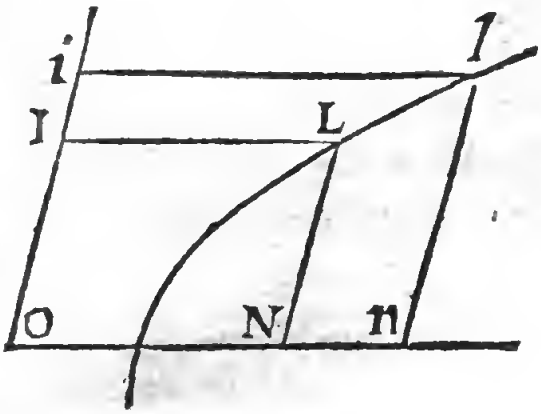
Dans l'Ellipſe, ou le Cercle, & l'Hyperbole, l'origine du lieu réduit eſt le centre, ſa tige un diametre, & ſes rameaux les ordonnées de ce diametre ; & pour les Aſymptotes, ſa tige eſt une des Aſymptotes, & ſes rameaux ſont des lignes paralleles à l'autre.

La difference que je mets entre le lieu requis & le lieu réduit, ne ſe doit entendre que de leurs parties qui ſont differentes ; car le lieu doit être le même, & le requis n'eſt déterminé que par le réduit.

# OBSERVATIONS SUR LA CONSTRUCTION DES LIEUX.

I.

*On peut changer les parties de la Tige en Rameaux, & les Rameaux en parties de la Tige, ſans changer le lieu, l'origine, ny l'angle compris par la Tige & par les Rameaux.*




Soit le lieu L *l*, l'origine O, la tige ON, & les rameaux NL, *n l*; ſi par l'origine O on mene la ligne OI parallele aux rameaux; & ſi de tous les

points du lieu on tire des lignes LI, *l i* paralleles à la tige ON, on poura prendre OI, O *i* pour les parties de la tige, & qui ſont égales aux rameaux NL, *n l*, & les lignes IL, *i l*, qui ſont égales à ON, O *n*, peuvent être priſes auſſi pour les rameaux, & l'origine O, le lieu L *l*, & l'angle OIL égal à l'angle ONL, ne changeront point.

2.

On peut toûjours prendre au lieu d'un rectangle connu, un quarré, ou un autre rectangle qui luy ſoit égal, & qui ſoit auſſi connu, & dont l'un des côtez ſoit tel que l'on voudra, comme au lieu du rectangle *ab* on peut prendre un rectangle dont l'un des côtez ſoit *d*, & l'autre côté ſera par conſequent $\frac{ab}{d}$, qui eſt une quantité connuë qui n'a qu'une dimenſion, ſoit donc $m \propto \frac{ab}{d}$, on aura

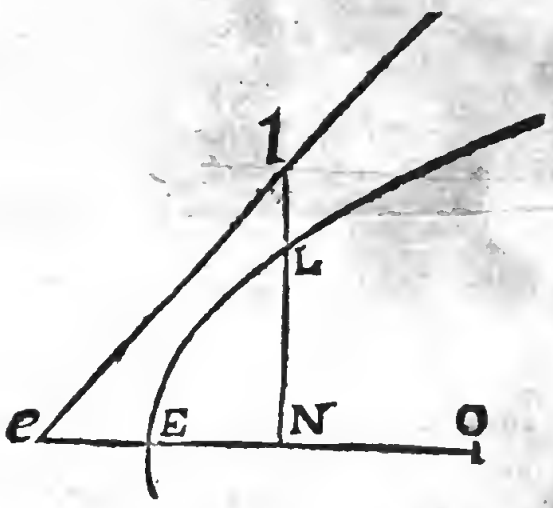
$dm \propto ab$ ; on peut auſſi prendre $mm \propto ab$, ſuppoſant $m$ moyenne proportionnelle entre $a$ & $b$ ; on peut auſſi prendre $mm \propto \frac{abb}{d}$ ; car $\frac{abb}{d}$ n'aque deux dimenſions.

On peut auſſi prendre au lieu d'une quantité inconnuë plus ou moins quelques connuës, ou inconnuës, une autre inconnuë, comme au lieu $x+a-b+z$, une inconnuë $y$ qui leur ſoit égale à toutes enſemble; puiſque la quantité inconnuë que l'on prend peut comprendre les connuës auſſi bien que les inconnuës, de quelle grandeur qu'elles puiſſent être.

On peut encore prendre un rectangle, un ſolide, un plan-plan &c. compoſé d'une connuë telle que l'on voudra & d'une inconnuë, de quelle dimenſion qu'elle ſoit, égal au quarré, au cube, au quarré-quarré &c. d'une inconnuë, comme par exemple on peut prendre $ay \propto xx$ & $ay^3 \propto x^4$, ou

bien $aayy \propto x^4$, ou enfin $a^3y \propto x^4$ ; car pourvû que d'un ſolide ou d'un plan-plan &c. on en ſuppoſe une ſeule ou pluſieurs dimenſions indéterminées ou inconnuës, tout le ſolide, ou plan-plan ſera indéterminé, & par conſequent il peut être ſuppoſé égal à une autre quantité inconnuë qui a autant de dimenſions.

3.




Entre les lignes courbes du premier genre, qui ſont les Sections Coniques, le Cercle & l'Ellipſe ne s'augmentent pas à l'infini ; c'eſt pourquoy tous les lieux ne s'augmentent pas

auſſi à l'infini, & l'on ne peut pas prendre pour l'une des inconnuës, telle ligne que l'on voudra, puiſque l'autre ſeroit nulle ; & même dans pluſieurs cas de la ligne droite, de la Parabole, & de l'Hyperbole, les inconnües auront un terme, par exemple, ſi le lieu eſt LE ou *l e*, & le point O l'origine, & la tige ON qui rencontre le lieu en E ou *e*, il eſt évident qu'en ces points E & *e*, les rameaux NL, N*l* ſont nuls ; les points E & *e* ſont donc les termes de ces lieux.

4.

O N A

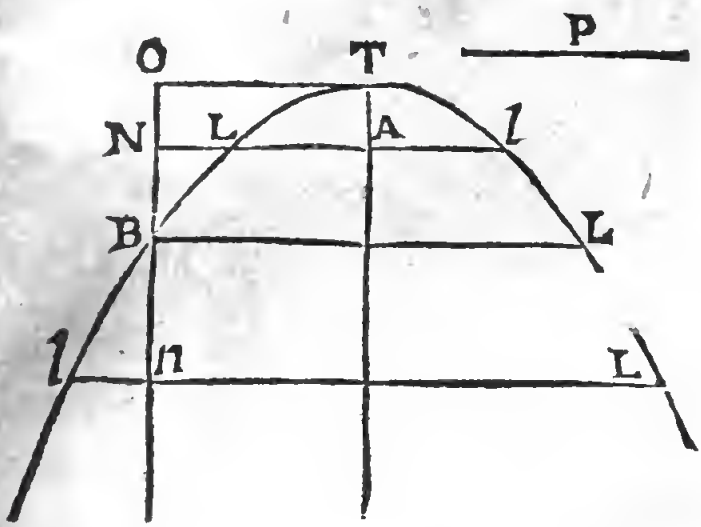
Si dans la réduction de l'Equation d'un lieu, on trouve que l'inconnüe, qui eſt les parties de la tige du lieu réduit, ſoit égale à une connüe moins l'inconnüe, qui eſt les parties de la tige du lieu requis, & que ces deux tiges ſoient ſur une même ligne droite, elles iront l'une contre l'autre, & non pas du même ſens ; par exemple,

inconnüe $v$ vient pour les parties
la tige du lieu reduit, & que $x$ ſoit
parties de la tige du lieu requis, &
e $v$ ſoit $\propto a-x$, $v$ & $x$ iront l'une
rs l'autre; car ſoit AO $\propto a$, ON $\propto x$,
N ſera $\propto v$, & d'autant que l'une
igmentera l'autre diminuera, &
iacune ne peut pas devenir plus
rande que OA.

5.

Lorſqu'il y a dans une partie de
'Equation le quarré d'une inconnüe
& le rectangle qu'elle fait avec une
connüe affecté du ſigne —, cette in-
connüe a deux grandeurs differentes
dans le lieu, qui ſont deux racines,
mais elles ne ſont pas toûjours vrayes
ny réelles; ce qui ſe voit clairement,
ſi l'on conſidere que le quarré de
$x-a$, ou bien de $a-x$, eſt le même
$xx-2ax+aa$, c'eſt pourquoy dans
la conſtruction du lieu on peut pren-
dre $x-a$ ou $a-x$ pour une même.

*Exemple dans la Parabole.*




Soit une Parabole LT*l*, dont TA ſoit un diametre, & P ſon parametre, TO touchante à l'extrêmité T. Soit le point O l'origine d un lieu dont ON eſt la tige parallele à TA, & les rameaux NL paralleles à OT.

Soit fait TO ∞ *a*, P ∞ *p*, ON ∞ *x*, NL ∞ *y*. A cauſe de la Parabole, on a l'Equation $xp \propto aa - 2ay + yy$, mais ſi on prolonge NL juſques à l'autre côté de la Parabole en *l*, & ſoit N*l* ∞ *y*, on aura la même Equation

$\infty yy - 2ya + aa$ : c'eſt pourquoy ſi
quation propoſée étoit celle-cy,
voit qu'il y auroit deux racines de
quantité $y$, c'eſt à dire que $y$ auroit
ux grandeurs differentes, qui ſe-
ient toutes deux vrayes & réelles ſi
neud N étoit hors de la Parabole,
ıt s'il étoit ſur la Parabole, comme
n B, il n'y auroit qu'une racine BL
autre étant évanoüie, & s'il étoit au
ledans de la Parabole comme en $n$,
l y en auroit une vraye $n$L, & une
fauſſe $nl$, ce que le calcul fait voir;
mais cela n'arrive pas toûjours de mê-
me, & les differentes poſitions de l'o-
rigine, de la tige, & des rameaux à
l'égard du lieu, y apportent du chan-
gement. Ce que j'ay dit de la Para-
bole dans cet Exemple, ſe doit enten-
dre de même de l'Ellipſe ou du Cer-
cle, & de l'Hyperbole, & même pour
chacune des inconnües.

6.

En poſant que les neuds du lieu re-
quis doivent toûjours être ſur leur

tige, ou bien que les rameaux ſoient joints à leur tige, il arrive ſouvent que par la reduction la tige & les rameaux du lieu réduit ſont ſeparez, c'eſt à dire lorſque la ligne droite qui paſſe par les neuds du lieu réduit, n'eſt pas parallele à celle qui détermine la grandeur des parties de ſa tige, car pour lors les parties de la tige ne peuvent pas être ſur une même ligne droite, & avoir une même origine; c'eſt ce qui oblige de changer le lieu réduit, afin que ſa tige & ſes rameaux ſoient joints auſſi-bien que ceux du lieu requis, & cela ſe fait en changeant le parametre du diametre qui eſt la tige du lieu réduit dans les Sections Coniques, comme les Exemples le feront voir dans la ſuite, ſans qu'il arrive de changement au lieu pour cela. Dans le lieu réduit à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, on n'a point d'égard à ce changement à cauſe des proprietez des aſymptotes, quoy qu'en effet il s'y trouve.

7.

7.

Lorſque dans la reduction d'une quation, on prend une inconnuë gale à l'une des inconnuës propoes plus ou moins l'autre inconnuë opoſée, ou l'une de ſes parties, il ut toûjours faire que les parties de tige du lieu requis ſoient égales à derniere de ces deux inconnuës; ar ſi on les prenoit égales à la preniere, on ſe trouveroit embaraſſé dans la conſtruction, ce qui ſe verra par les Exemples. Et dans le lieu à la ligne droite, il faut prendre pour les parties de la tige, l'inconnuë que l'on change.

8.

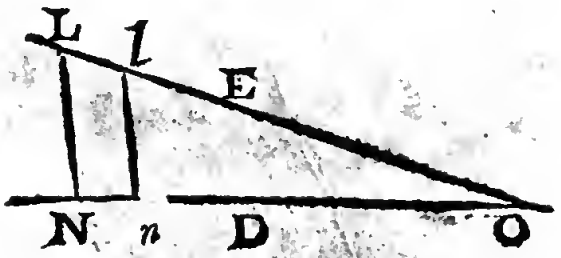
Pour la conſtruction des lieux je poſe d'abord O *n* pour l'une des parties de la tige du lieu requis d'une grandeur priſe à volonté, pourvû qu'elle ne ſurpaſſe pas ſes termes ſi elle en a, ce qui ſe connoît par la reduction; & aprés par le neud *n* je mene *nl* pour un rameau qui fait

avec la tige un angle pris à volonté, ou bien égal à un angle donné : mais la grandeur de ce rameau ne peut être déterminée que par la conſtruction du lieu réduit qui détermine d'une même façon la grandeur de tous les rameaux par rapport à leurs parties de la tige, & aux quantitez connuës de l'Equation.

9.

Il me ſemble qu'il n'eſt pas neceſſaire de donner des Regles, & d'apporter des exemples dans la conſtruction pour les ſignes + & — dont les termes des Equations ſont affectez, puiſqu'il n'y a perſonne ſi peu verſé dans la Geometrie, qui ne connoiſſe de quel côté de l'origine & de la tige pour les rameaux, on doit placer les lignes qui expriment les quantitez de l'Equation, afin qu'elles ayent mêmes ſignes qu'elles.

# CONSTRUCTION
## DES LIEUX A LA LIGNE DROITE, REDUITS A LA I. FORMULE.
### I. EXEMPLE.




Soit l'Equation proposée $\frac{ax}{b} \propto y$.

*Construction.*

Je pose le point O pour l'origine, & ON pour la tige, & par quelque point *n* de la tige qui sera un neud, je mene *nl* pour un rameau, qui fera avec la tige l'angle O *nl* tel que l'on

voudra, ou égal à un angle donné.

Soit O$n$∞$x$, qui eſt une partie de la tige; $n\,l$∞$y$ qui eſt un rameau dont la grandeur n'eſt point encore déterminée. Je prens OD∞$b$, & ayant mené DE parallele aux rameaux, je la fais ∞$a$. Je dis que la ligne droite OEL eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Par quelque neud N de la tige ON, ayant mené le rameau NL; *par la conſtruction* ON eſt à NL, comme OD à DE; ce qui eſt en termes analytiques $x \mid y \parallel b \mid a$, d'où vient l'équation $\frac{ax}{b}$∞$y$, qui eſt celle qu'il falloit conſtruire: & puiſque l'on peut prendre quel point on veut de la ligne ON, il s'enſuit qu'il y a une infinité de ſolutions differentes pour les inconnuës $x$ & $y$.

Si l'équation étoit ſimplement $x$∞$y$, il faudroit prendre ſur O$n$,

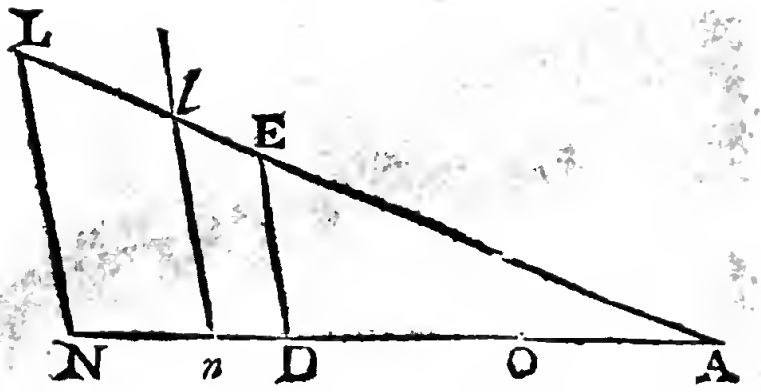
D de quelle grandeur on voudroit, ayant mené DE faisant avec OD angle requis, faire DE égale à OD.

## 2. EXEMPLE.

Soit une équation proposée $y \propto \frac{bx}{a} + c$, ou bien $y \propto \frac{bx+ac}{a}$.

Je prens $bm \propto ca$, & j'auray $y \propto \frac{bx+bm}{a}$, & je suppose $z \propto x+m$, ce qui réduit l'équation proposée à ses moindres termes $y \propto \frac{zb}{a}$, qui est un lieu à la ligne droite, suivant la premiere Formule.

*Conſtruction.*




Je prens le point O pour l'origine du lieu, & O *n* pour la tige, dont je fais les parties ∞ *x*, *ſuivant la 7. obſervation*, & la ligne *n l* pour un rameau que je ſuppoſe ∞ *y*, lequel rameau fera avec ſa tige un angle O *n l* tel que l'on voudra, ou égal à un angle donné. Ayant prolongé la tige vers l'origine en A, je fais O A ∞ *m*: A *n* ſera donc ∞ *z*; car la réduction nous apprend que *z* eſt ∞ *x* + *m*: c'eſt pourquoy le point A ſera l'origine du lieu réduit. Je fais donc

AD ∞ *a*, & je mene DE parallele aux rameaux & ∞ *b*. Je dis que la ligne droite AEL eſt le lieu requis.

*Démonſtration.*

Par quelque neud N ayant mené le rameau NL ; *par la conſtruction* AN ſera à NL, comme AD à DE ; ce qui eſt en termes analytiques $x+m \mid y \parallel a \mid b$, d'où l'on tire l'équation $y \infty \frac{bx+bm}{a}$, & à la place de *bm* ſubſtituant ſa valeur *ca*, il vient $y \infty \frac{bx}{a}+c$, qui eſt l'équation propoſée.

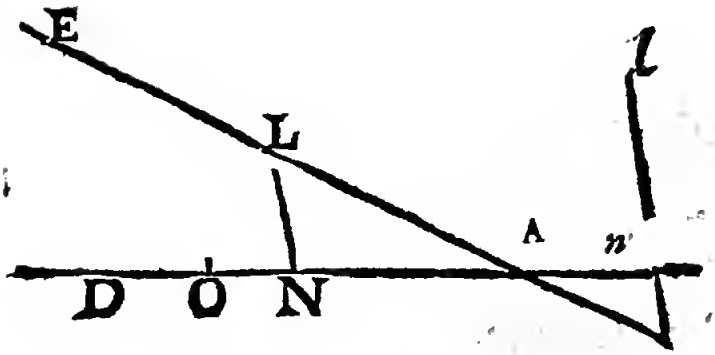
3. EXEMPLE.

Soit une équation propoſée $\frac{ya}{b}+y \infty c-x$.

Multipliant par *b*, & diviſant le produit par $a+b$, j'auray

$y \propto \frac{cb - xb}{a+b}$. Je prens $z \propto c - x$, & l'équation ſera toute réduite à $y \propto \frac{bz}{a+b}$, qui eſt un lieu à la ligne droite, ſuivant la premiere Formule.

*Conſtruction.*




Soit dans l'angle donné O *n l* les parties de la tige O*n* $\propto x$, & quelque rameau *nl* $\propto y$. Soit pris OA $\propto c$. A cauſe que dans l'équation propoſée $c - x \propto z$, il s'enſuit que $x$ ne ſurpaſſera jamais la grandeur $c$, *par la 4. obſervation*, & que le point A ſera

le commencement de $z$ allant vers O. A cauſe de l'équation réduite on a $a+b \mid b \parallel z \mid y$, ce qui montre que l'on doit prendre AD $\propto a+b$; & ayant mené DE parallele aux rameaux, & l'ayant faite $\propto b$. Je dis que la ligne droite AE eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

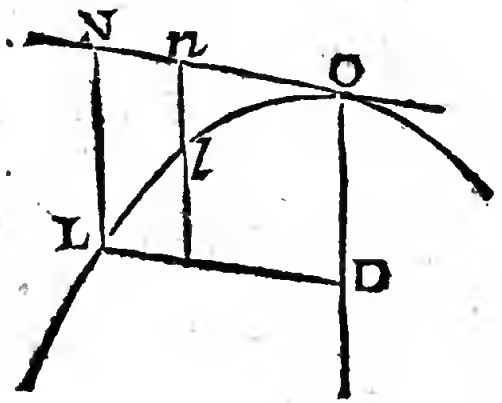
Par quelque neud N de la tige OA, qui eſt déterminée dans cet exemple *par l'obſervation* 3. ayant mené le rameau NL, on aura par la conſtruction AN à NL, comme AD à DE: mais AN eſt $\propto c-x$, c'eſt pourquoy en termes analytiques $a+b \mid b \parallel c-x \mid y$, d'où vient l'équation $\frac{ay+by}{b} \propto c-x$, ou bien $\frac{ay}{b}+y \propto c-x$, qui eſt celle qui étoit propoſée.

# CONSTRUCTION
## DES LIEUX A LA PARABOLE, RÉDUITS A LA 2. FORMULE.

### 1. EXEMPLE.

Soit l'équation proposée $ax \propto yy$.

*Construction.*




Je prens le point O pour l'origine du lieu ; O *n* pour la tige dont je fais les parties $\propto y$ ; & les rameaux $nl \propto x$, qui font avec la tige un angle O*nl* tel que l'on voudra ; ayant mené par

l'origine la ligne OD parallele aux rameaux, & ayant décrit la Parabole O*l* L, dont OD ſoit le diametre, & ſes ordonnées ſoient paralleles à O *n*, & ſon parametre ∞ *a*. Je dis que cette Parabole eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Par quelque neud N ſoit mené le rameau N L; à cauſe de la Parabole O L *l*, le quarré de ON, ou de LD, qui luy eſt parallele & égale, eſt égal au rectangle de NL ou de ſon égale OD & du parametre du diametre OD, ce qui eſt en termes analytiques *ax* ∞ *yy*; qui eſt l'équation propoſée qu'il falloit conſtruire.

Si au lieu d'avoir pris dans la conſtruction les parties de la tige O *n* ∞ *y*, je les avois priſes ∞ *x*, le lieu auroit toûjours eſté le même, comme il eſt évident *par la* 1. *obſervation*.

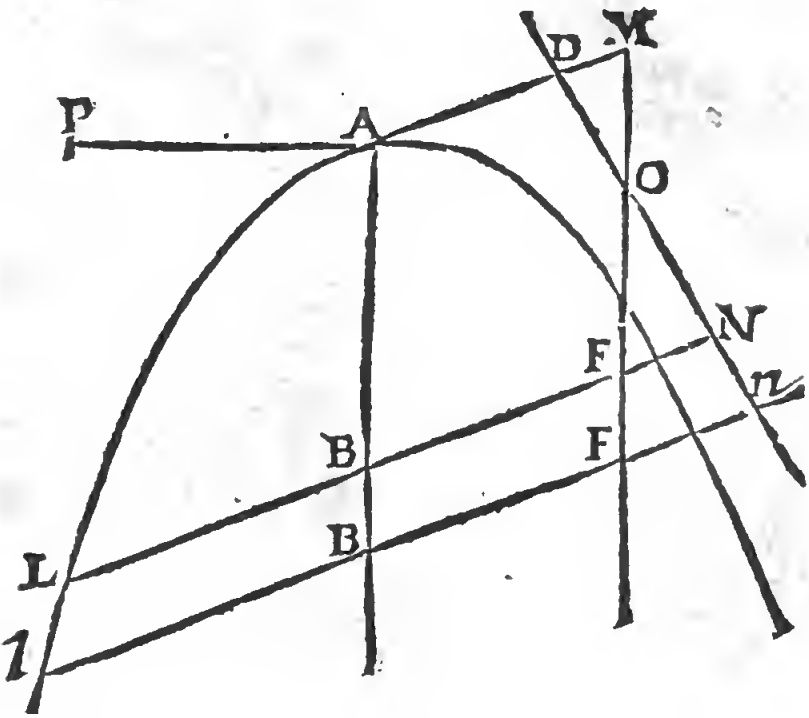
## 2. EXEMPLE.

Soit une équation proposée

$$yy - \frac{2rxy}{a} - 2ry + \frac{rrxx}{aa} + \frac{2rrx}{a} + rr \propto \frac{pbs + pxs}{a}.$$

Je prens $z \propto y - \frac{rx}{a} - r$, ce qui me donne $y \propto z + \frac{rx}{a} + r$, & substituant dans l'équation proposée cette valeur à la place de $y$, & son quarré à la place de $yy$, il vient l'équation suivante $zz \propto \frac{pbs + pxs}{a}$. Je prens encore $v \propto b + x$, & j'ay l'équation réduite aux moindres termes qu'elle puisse être $\frac{ps}{a} v \propto zz$, qui est un lieu à la Parabole, suivant la 2. Formule.

*Construction.*




Je prens O*n* pour les parties de la tige que je fais ☍ *x*, *suivant la 7. observation*, & le rameau *n l* ☍ *y*, faisant avec O*n* quel angle que ce soit, & dont la grandeur *n l* n'est déterminée que par la description du lieu, *suivant la 8. observation*. A cause que *x* est ☍ *v*—*b*, soit prolongé la tige *n* ⊙

vers l'origine en D, & soit fait OD ∞ *b*, il est évident que D *n* sera toûjours ∞ *v*, en quelque lieu de la tige que soit pris le neud *n* : mais l'on a $y \propto z + \frac{rx}{a} + r$ ; c'est pourquoy par le point D ayant mené ADM parallele aux rameaux, je fais comme *a* est à *r*, ainsi OD à DM, & ayant mené la ligne MOF, *n* F sera toûjours $\propto \frac{rx}{a}$ ; puis je prens MA ∞ *r*, & menant AB parallele à MO, lorsque le lieu sera décrit rencontrant B*l* en *l*, il est évident que B*l* sera ∞ *z*, car *nl* sera $\propto z + r + \frac{rx}{a}$, ce qui a esté posé ∞ *y* : tous les points B seront donc les neuds du lieu réduit posez sur la ligne AB, mais ils sont separez de leur tige D*n* qui est ∞ *v* ; c'est pourquoy il faut changer la tige D*n* en la tige AB, dont A sera l'origine, DA étant parallele à *n* B, & pour faire ce change-

ment on a DO à OM, comme D*n* à MF, ou AB ſon égale, mais le triangle DOM eſt donné de poſition, c'eſt pourquoy la raiſon de DO à OM eſt auſſi donnée; quelle ſoit donc comme *a* à *f*: d'autant que les ordonnées ∞ *z* que l'on avoit par le lieu réduit, ne changent pas lorſque les parties du diametre D*n* ∞ *v* ſont changées en AB qui ſeront ∞ $\frac{vf}{a}$ ſelon la raiſon poſée cy-deſſus; Il faut changer la grandeur du parametre, afin que le rectangle de ce nouveau parametre & des parties du diametre changé ſoit ∞ *zz* qui étoit égal par la réduction à $\frac{pfv}{a}$, & pour ce ſujet je ſuppoſe que ce parametre changé ſoit ∞ *t* pour en avoir ſa valeur, j'auray donc $\frac{tvf}{a}$ ∞ $\frac{pvf}{a}$, ce qui me donne *t* ∞ $\frac{pf}{f}$ qui doit dont être le parametre que je cherche de la Parabole du lieu ré-

duit changé. Je dis que la Parabole AL*l* dont AB eſt le diametre, la ligne AP $\propto \frac{p\int}{f}$ le parametre, & les ordonnées paralleles à *n l*, eſt le lieu requis.

*Démonſtration.*

Soit pris quelque neud N ſur la tige ON, & ayant mené le rameau NL, par la conſtruction BL eſt $\propto y - \frac{rx}{a} - r$, dont le quarré eſt $yy - \frac{2rxy}{a} - 2ry + \frac{rrxx}{aa} + \frac{2rrx}{a} + rr$, qui doit être égal au rectangle de AB, AP : mais pour avoir la valeur de AB, il faut faire comme *a* à *f*, ainſi ND $\propto x + b$ à AB qui ſera $\propto \frac{fx + fb}{a}$ ; & AP eſt $\propto \frac{p\int}{f}$ ; c'eſt pourquoy $\frac{p\int xf + p\int bf}{af}$ ou bien $\frac{p\int x + p\int b}{a} \propto yy$

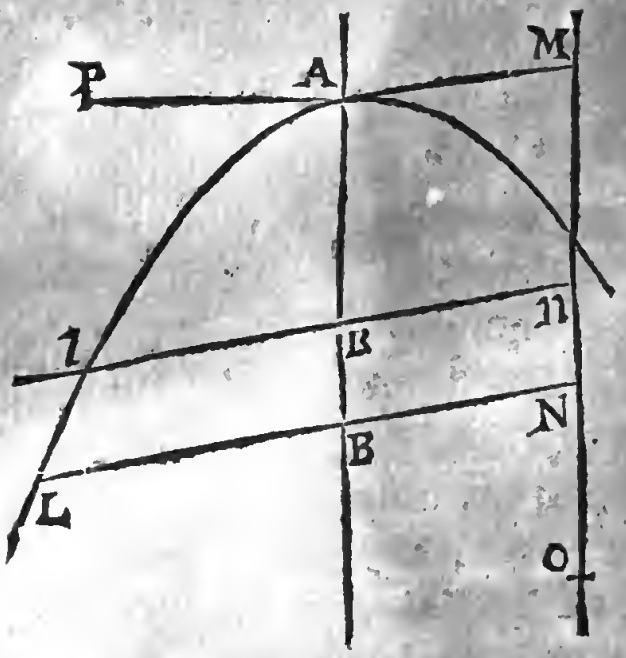
$-\frac{2rxy}{a}-2ry+\frac{rrxx}{aa}+\frac{2rrx}{a}+rr$, qui est l'équation proposée.

## 3. EXEMPLE.

Soit une équation proposée $ax-xx\propto by$, ou bien $xx-ax+by\propto 0$.

Je prens $z\propto x-\frac{1}{2}a$ en faisant la réduction suivant la 1. Maniere, j'ay $zz\propto\frac{1}{4}aa-by$; & supposant $bf\propto\frac{1}{4}aa$, j'auray $zz\propto bf-by$; & je prens encore $v\propto f-y$ pour faire la réduction entiere de l'équation à $bv\propto zz$, qui est un lieu à la Parabole suivant la 2. Formule.

*Conſtruction.*




Soit l'origine O & la tige O*n* du lieu requis, dont je fais les parties ɔo*y*, les pouvant faire auſſi égales à *x*, n'y ayant rien dans la réduction qui m'oblige à l'un plûtôt qu'à l'autre, ſuivant la 7. obſervation. Soient les rameaux *n l* ɔo *x*, faiſant avec la tige l'angle O*n l* tel que l'on voudra. A cauſe que dans la réduction *v* eſt

$\propto f - y$, je prens OM $\propto f$, il s'enſuit par l'obſervation 4. que la quantité $y$ ne peut être plus grande que OM, & que M étant le commencement de $v$ il ira vers O : mais encore dans la réduction $x - \frac{1}{2}a$ eſt $\propto z$ ; c'eſt pourquoy il faut mener MA parallele aux rameaux & la faire $\propto \frac{1}{2}a$, & ayant tiré AB parallele à la tige OM, la ligne BN, B$n$ ſera par tout $\propto \frac{1}{2}a$, car ce ſera des parties des rameaux compriſes entre OM, & AB : le point A ſera donc l'origine du lieu réduit, la ligne AB ſa tige, & les lignes BL, B$l$ ſes rameaux $\propto z$. Je dis que la Parabole AL$l$, dont AB eſt le diametre, ſes ordonnées paralleles à B$l$, & ſon parametre AP $\propto b$, eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Ayant mené quelque rameau NL ; à cauſe de la Parabole le rectangle de MN ou de AB ſon égale avec le para-

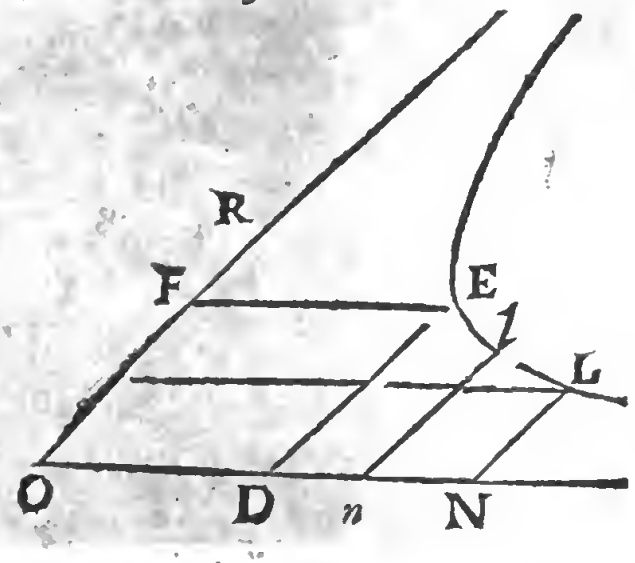
mettre AP eſt égal au quarré de BL, ce qui eſt en termes analytiques, ſuppoſant les mêmes caracteres pour exprimer les mêmes lignes que dans la conſtruction, $fb - yb \propto xx - ax + \frac{1}{4}aa$, & à la place de $fb$ ſubſtituant ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, on aura $by \propto ax - xx$, qui eſt l'équation propoſée qu'il falloit conſtruire.

# CONSTRUCTION
## DES LIEUX A L'HYPERBOLE ENTRE SES ASYMPTOTES, REDUITS A LA 3. FORMULE.

### 1. EXEMPLE.

Soit une équation proposée $xy \propto aa$.

*Construction.*




Je prens indifferemment les parties de la tige $On \propto x$, & les rameaux

$nl \propto y$, & l'angle $Onl$ soit tel que l'on voudra. Ayant mené OR parallele aux rameaux $nl$, je prens $OD \propto a$, & ayant mené DE parallele à OR, & l'ayant fait aussi $\propto a$, je dis que l'Hyperbole E $l$ L qui passe par le point E, & dont les asymptotes sont $On$ & OR, est le lieu requis.

## *Démonstration.*

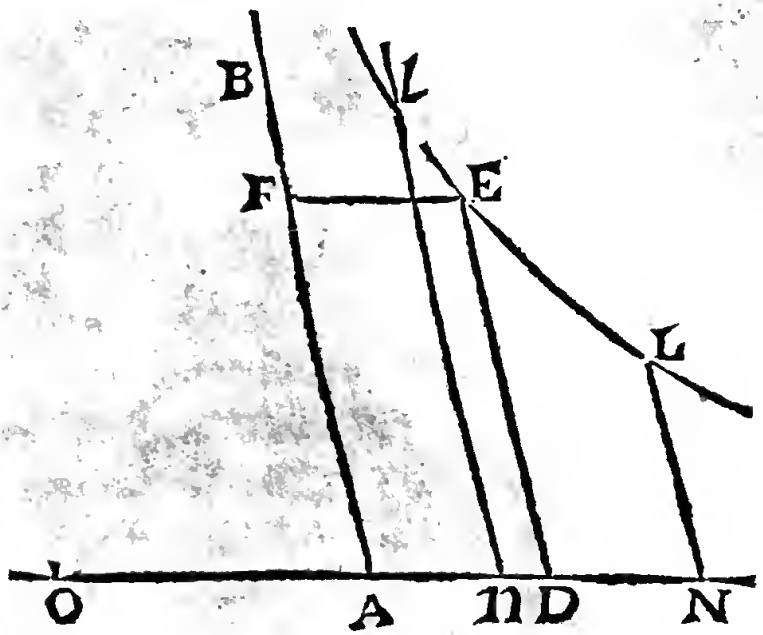
Par quelque neud N ayant mené le rameau NL ; à cause des asymptotes de l'Hyperbole, le rectangle ON, NL est égal au rectangle OD, DE, ce qui est en termes analytiques $xy \propto aa$, qui est l'équation proposée qu'il falloit construire.

## 2. EXEMPLE.

Soit une équation proposée $xy - ay \propto ab$, je prens $z \propto x - a$, & l'équation est réduite à $zy \propto ab$, qui est un lieu à l'Hyperbole entre ses

aſymptotes, ſuivant la 3. Formule.

*Conſtruction.*




Je prens les parties de la tige O*n* ∞ *x*, & les rameaux *nl* ∞ *y* qui font enſemble quel angle on voudra O*nl*: A cauſe que dans la réduction *x* — *a* ∞ *z*, je prens OA ∞ *a*, & ayant mené AB parallele aux rameaux, le point A ſera l'origine du lieu réduit; & dautant que dans le lieu réduit *zy* eſt ∞ *ab*, je prens AD ∞ *a*, & ayant

mené DE parallele à AB & ∞ *b*. Je dis que l'Hyperbole E*l*L qui paſſe par le point E, & dont A*n* & AB ſont les aſymptotes, eſt le lieu requis.

*Démonſtration.*

Ayant mené quelque rameau NL; à cauſe des aſymptotes le rectangle AN, NL eſt égal au rectangle AD, DE, ce qui eſt en termes analytiques, en ſe ſervant des mémes caracteres qui ont eſté poſez dans la Conſtruction $xy - ay \propto ab$, qui eſt l'équation propoſée.

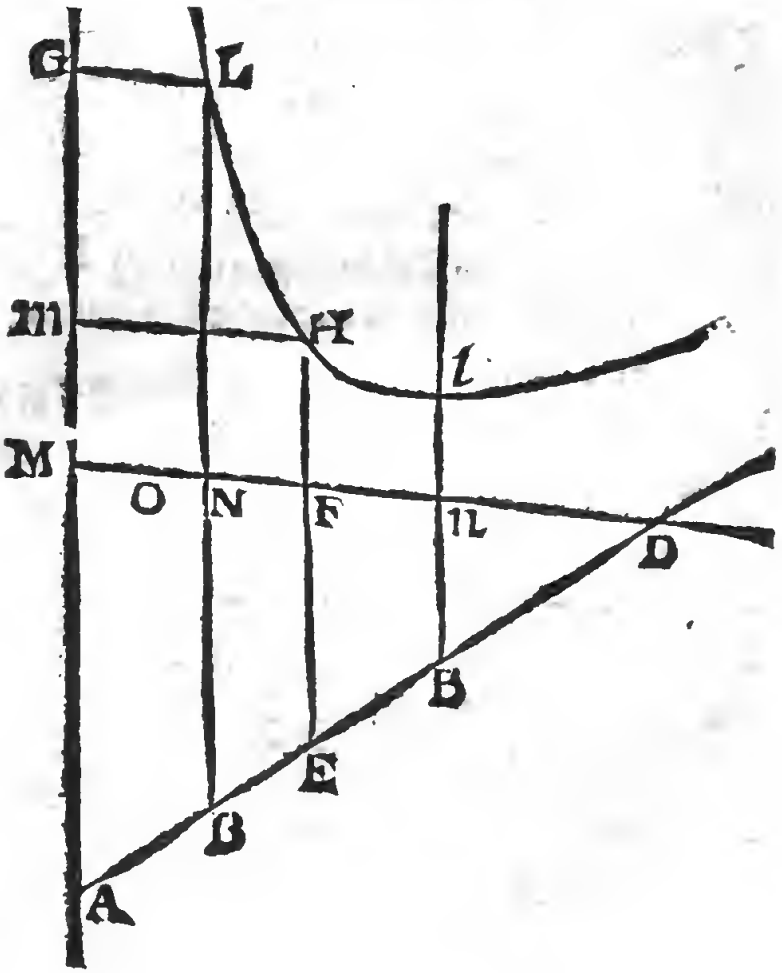
3. EXEMPLE.

Soit une équation propoſée $ax - xx + xy + by \propto ad$.

*Par la 2. maniere de réduction*, je prens $z \propto x + b$, ce qui me donne $x \propto z - b$, & ſubſtituant dans l'équation cette valeur à la place de $x$, & ſon

ſon quarré à la place de $xx$, il vient $az - zz + 2bz + yz \propto ad + ab + bb$ ; je prens encore $v \propto a - z + 2b + y$, & $ff \propto ad + ab + bb$, & mettant ces quantitez à la place de leurs valeurs dans l'équation, elle ſera toute réduite à $vz \propto ff$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, ſuivant la 3. Formule.

*Construction.*




Suivant la 7. obſervation, je prens les parties de la tige $On \propto x$ & les rameaux $nl \propto y$. A cauſe que dans la réduction $x+b$ eſt $\propto z$, je prolonge la tige vers ſon origine en M, & je

prens OM ∞ *b* : M *n* ſera donc toûjours ∞ *z* ou à $x-b$ en quelque lieu que ſoit le neud *n* ; & par la même réduction *y* eſt ∞ $v-a+z-2b$ ; c'eſt pourquoy ayant mené MA parallele aux rameaux, & l'ayant fait ∞ $2b+a$, & MD étant auſſi pris ∞ MA, ſoit tiré AD ; il eſt évident que les parties *n* B des rameaux, priſes entre MD & AD ſont ∞ $2b+a-z$ ; c'eſt pourquoy les lignes B *l* ſeront ∞ *v*, & les points B ſeront les neuds du lieu réduit, dont le point A eſt l'origine : mais à cauſe des proprietez des aſymptotes, il n'eſt pas neceſſaire de changer les parties de la tige O *n* aux parties de la tige AB du lieu réduit, il ſuffit de prendre MF ∞ *f*, & ayant mené FE parallele à MA, ou aux rameaux, & ayant fait EH auſſi ∞ *f*, à cauſe que dans le lieu réduit il y a *ff*. Je dis que l'Hyperbole LH *l* qui paſſe par le point H, & dont les lignes AM, AD ſont les aſymptotes, & le point A le centre, eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Par quelque neud N ayant mené le rameau NL prolongé juſques à l'aſymptote en B, & par les points H & L ayant auſſi mené les lignes H *m*, LG paralleles à M *n* ; *par la proprieté des aſymptotes*, le rectangle *m* H, ou ſon égale MF, HE eſt égal au rectangle GL ou ſon égale MN, LB, ce qui eſt en termes analytiques *ff* ou ſa valeur $ad+ab+bb \propto bb+ab-bx+by+ax-xx+xy$, qui ſe réduit à $ad \propto by+ax-xx+xy$, qui eſt l'équation propoſée qu'il falloit conſtruire, ſuivant les obſervations generales, on voit que *x* ne peut pas être plus grande que OD.

De plus, qu'il y a deux racines dans ce lieu pour la valeur de *x*, à cauſe de $ax-xx$, ou bien de $xx-ax$. Et la tige du lieu réduit ne ſert point dans cette conſtruction, quoy que cela revienne toûjours à la même

choſe; car ſoit MD à AD, comme $r$ à $f$, & que l'on faſſe comme $r$ à $f$, ainſi $f$ l'un des côtez du quarré $ff \propto ad + ab + bb$ a une quatriéme proportionnelle qui ſera $\frac{ff}{r} \propto$ à AE partie de la tige réduite, & la ligne EH étant priſe $\propto f$, on aura $\frac{fff}{r} \propto$ au rectangle AB, BL, qui donnera la même équation que celle que l'on a trouvée, car il faudra auſſi changer MN en AB dans la raiſon de $r$ à $f$.

On voit encore que la conſtruction de ce lieu, qui a eſté faite par la réduction ſelon la 2 maniere, eſt plus ſimple & plus facile que celle que l'on auroit faite par la premiere maniere de réduction, & qui auroit réduit l'équation à un lieu à l'Hyperbole, ſuivant la 5. Formule.

# CONSTRUCTION
## DES LIEUX A L'ELLIPSE, OU AU CERCLE, REDUITS A LA 4. FORMULE.

### *Avertiſſement ſur les conſtructions des lieux à l'Ellipſe, & à l'Hyperbole.*

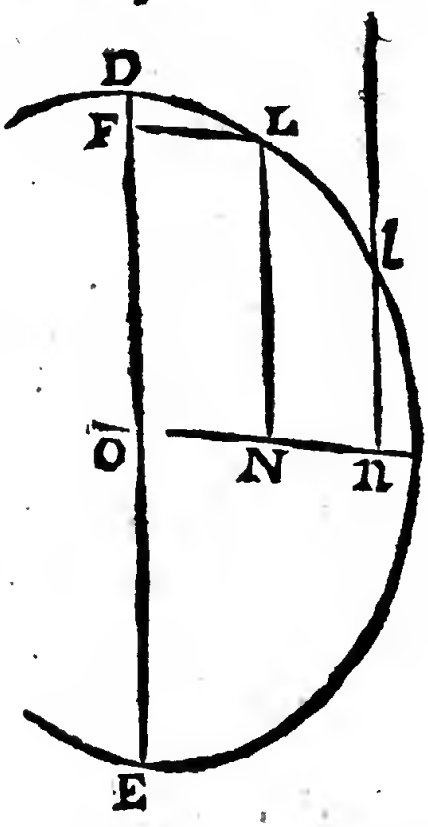
Dans la premiere partie des équations réduites aux Formules 4. & 5. qui ſont à l'Ellipſe, & à l'Hyperbole, la raiſon du numerateur au dénonciateur de la fraction du quarré de la quantité inconnuë, comme dans le premier Exemple ſuivant, la raiſon de *a* à *b*, eſt toûjours celle du diametre à ſon parametre, quoy que dans la ſeconde partie de l'équation la racine du quarré de la quantité connuë qui y eſt, comme dans le même exemple *d*, deſigne la grandeur de la

moitié de ce même diametre, & il faut bien prendre garde de confondre la raiſon du diametre au parametre avec le diametre même, à moins que dans l'équation le numerateur de la fraction du quarré de l'inconnuë de la premiere partie de l'équation, comme $a$, ne fût égal au double de la racine du quarré de la quantité connuë de la ſeconde partie comme $d$, & le parametre ſera toûjours $\frac{2bd}{a}$ car on doit faire comme $a$ à $b$, ainſi le diametre $2d$ à ſon parametre $\frac{2bd}{a}$ ſuppoſant l'exemple propoſé.

## 1. EXEMPLE.

Soit une équation proposée $\frac{axx}{b} \propto dd - yy$.

*Construction.*




Je prens à volonté les parties de la tige $On \propto x$, & les rameaux $nl \propto y$ ; par l'origine O je mene EOD pa-

rallele aux rameaux, & je fais OD & OE ∞ chacune à *d*. Je dis que l'Ellipſe D*l*E, dont le point O eſt le centre, la ligne DE un diametre & ſon parametre $\frac{2bd}{a}$, & les ordonnées à ce diametre, paralleles à O*n*, eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Par quelque neud N ayant mené le rameau NL, & par le point du lieu L la ligne LF parallele à NO; *par la proprieté de l'Ellipſe*, le rectangle EF, FD eſt au quarré de FL, comme le diametre ED à ſon parametre, ce qui eſt en termes analytiques *dd*—*yy* | *xx* || *a* | *b*, d'où vient l'équation $\frac{axx}{b}$ ∞ *dd*—*yy*, qui eſt celle qui étoit propoſée.

Si les parties de la tige O*n* avoient eſté priſes d'abord ∞ *y* & non pas à *x*, il n'auroit pas fallu changer les ra-

meaux en parties de la tige, & les parties de la tige en rameaux, en menant LF parallele à $n$O, comme il a fallu faire pour faire la démonſtration,

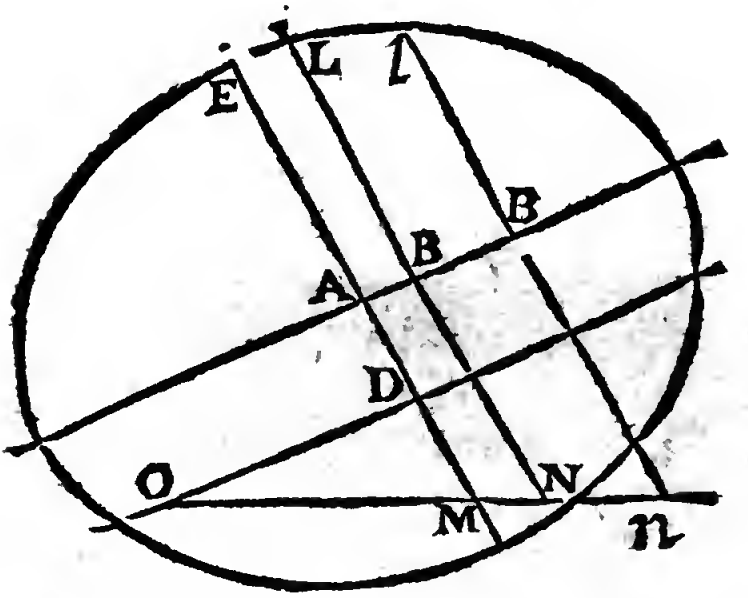
On remarquera auſſi que l'on peut changer cette équation en la ſuivante $\frac{byy}{a} \propto dd - xx$, ce qui ne change rien à la methode de conſtruction & de démonſtration.

## 2. EXEMPLE.

Soit une équation propoſée $xx + yy - xy - ay \propto ab$, je prens ſuivant la regle de la premiere réduction $z \propto y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a$, & l'équation ſe change en $zz + \frac{3}{4}xx - \frac{1}{2}ax \propto ab + \frac{1}{4}aa$, & multipliant par 4 & diviſant le produit par 3, afin que $xx$ ſoit ſans fraction, j'ay $\frac{4}{3}zz + xx - \frac{2}{3}ax \propto \frac{4}{3}ab + \frac{1}{3}aa$. Je prens encore $v \propto x - \frac{1}{3}a$, & l'équation toute réduite ſera $\frac{4}{3}zz \propto \frac{4}{9}aa + \frac{4}{3}ab - vv$, ou bien multipliant par 3, & diviſant le pro-

duit par 4, & tranſpoſant il viendra $\frac{3}{4}vv \propto \frac{3}{5}aa + ab - zz$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe, ſuivant la 4. Formule.

*Conſtruction.*




Suivant l'obſervation 7. je prens $On$ pour les parties de la tige, que je fais $\propto x$, & les rameaux $nl \propto y$; & à cauſe que dans la réduction il y a $v \propto x - \frac{1}{3}a$, je fais $OM \propto \frac{1}{3}a$; $Mn$ ſera donc $\propto v$, & il y a auſſi $y \propto z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$; c'eſt pourquoy ayant mené ME parallele aux rameaux, je

prens MD $\propto \frac{1}{2}$OM & je tire OD prolongée, puis je fais DA $\propto \frac{1}{2}a$, & je mene AB parallele à OD ; $n$B ſera donc par tout $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ ; c'eſt pourquoy B$l$ ſera $\propto z$, le point A ſera donc l'origine du lieu réduit, dont AB ſera la tige & B$l$ les rameaux ; mais nous avons trouvé que M$n$ étoit une des parties de la tige du lieu réduit, laquelle n'eſt pas égale à AB, les rameaux ſont donc ſeparez de leur tige, c'eſt pourquoy il faut changer M$n$ en AB afin qu'ils ſoient joints : mais la raiſon de M$n$ à AB, eſt celle de OM à OD qui eſt donnée de poſition, qu'elle ſoit donc comme $r$ à $ſ$ ; j'auray $\frac{ſv}{r}$ au lieu de $v$, & $\frac{ſſvv}{rr}$ au lieu de $vv$. Je ſuppoſe maintenant que la raiſon du diametre du lieu changé à ſon parametre, eſt comme $m$ à $n$, & je trouve que $\frac{mſſvv}{nrr}$ doit être $\propto \frac{1}{4}vv$ ; car la ſeconde partie de

l'équation réduite ne doit point changer, multipliant donc par $rr$ & diviſant par $ff$, il viendra $\frac{mvv}{n} \propto \frac{3rrvv}{4ff}$ ou bien $\frac{m}{n} \propto \frac{3rr}{4ff}$, c'eſt ce qui montre que le diametre du lieu changé eſt à ſon parametre comme $3rr$ à $4ff$, c'eſt pourquoy l'équation réduite ſera changée à $\frac{3rrvv}{4ff} \propto \frac{1}{3}aa + ab - zz$.

Je dis que l'Ellipſe EL$l$ dont le point A eſt le centre, la ligne AE $\propto \sqrt{\frac{1}{3}aa + ab}$ le demi-diametre, ſes ordonnées paralleles à AB, & la raiſon du diametre double de AE à ſon parametre, celle de $3rr$ à $4ff$, eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Ayant mené quelque rameau NL, *par la proprieté de l'Ellipſe*, le quarré de AE moins le quarré de BL, eſt au

quarré de AB, comme le diametre $\propto$ 2AE à ſon parametre, ce qui eſt en termes analytiques (retenant les mêmes noms que cy-devant pour les quantitez poſées, & changeant MN en AB dans la raiſon $r$ à $\int$) $\frac{1}{3}aa + ab - yy + ay + xy - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}xx \mid \frac{xx\int\int - \frac{2}{3}x\int\int a + \frac{1}{9}aa\int\int}{rr} \parallel 3rr \mid 4\int\int$, d'où viendra une équation qui étant miſe en ordre ſera $xx + yy - xy - ay \propto ab$, qui eſt celle qui étoit propoſée & qu'il falloit conſtruire.

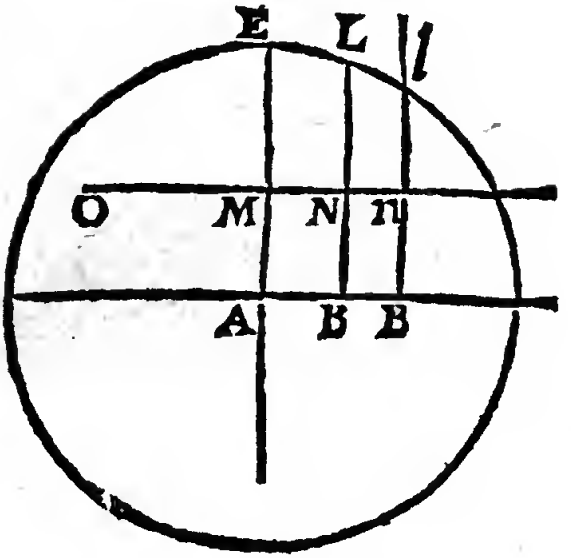
On remarquera que ſi l'angle ABL étoit droit, & ſi $3rr$ eſtoit égal à $4\int\int$, le lieu ne ſeroit pas une Ellipſe mais un cercle; car les ordonnées ſeroient perpendiculaires à leur diametre, & le parametre de ce diametre luy ſeroit égal.

## 3. EXEMPLE.

Soit une équation propoſée $yy - 2ay + aa + xx + 2bx + bb \propto dd$.

Je prens $z \propto y - a$, & aprés la premiere operation pour la reduction, je prens encore $v \propto x + b$, & l'équation ſera réduite à $zz + vv \propto dd$, qui eſt un lieu à une Ellipſe, dont le diametre eſt égal au parametre, ſi l'angle compris par les rameaux & par la tige du lieu réduit & changé s'il eſt neceſſaire, n'eſt pas droit : mais s'il eſt droit, le lieu eſt au Cercle, ſuivant la Formule 4.

*Conſtruction.*




Je prens la tige O*n*, dont je fais à volonté les parties ∞ *y*, n'y ayant rien dans la réduction qui oblige à les faire plûtoſt ∞ à *y* qu'à *x*, & les rameaux *nl* ∞ *x*. A cauſe que dans la réduction *z* eſt ∞ *y* — *a*, je prens OM ∞ *a*; M*n* ſera donc ∞ *z* : mais il y a auſſi dans la réduction *x* + *b* ∞ *v* : c'eſt pourquoy je tire MA parallele aux rameaux, & je la fais ∞ *b*, & par le point A je mene AB parallele à OM;

le point A ſera l'origine du lieu réduit, la ligne AB ſera ſa tige, & B*l* ſes rameaux. Si AB & B*l* ſont à angles droits du point A pour centre, & demi-diametre AE ∞ *d* ſoit le cercle E*l*L, qui ſera le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Par quelque neud N ſoit le rameau NL, *par la proprieté du Cercle* le quarré de AL eſt égal aux quarrez de AB & de BL enſemble, ce qui eſt en termes analytiques (en poſant pour ces lignes les mêmes caracteres que dans la conſtruction) $dd \infty yy - 2ay + aa + xx + 2bx + bb$, qui eſt l'équation propoſée qu'il falloit conſtruire.

Si l'angle AB*l* n'étoit pas droit au lieu du cercle, ce ſeroit une Ellipſe dont le diametre ſeroit égal à ſon parametre.

# CONSTRUCTION
## DES LIEUX A L'HYPERBOLE, REDUITS A LA 5. FORMULE.

### 1. EXEMPLE.

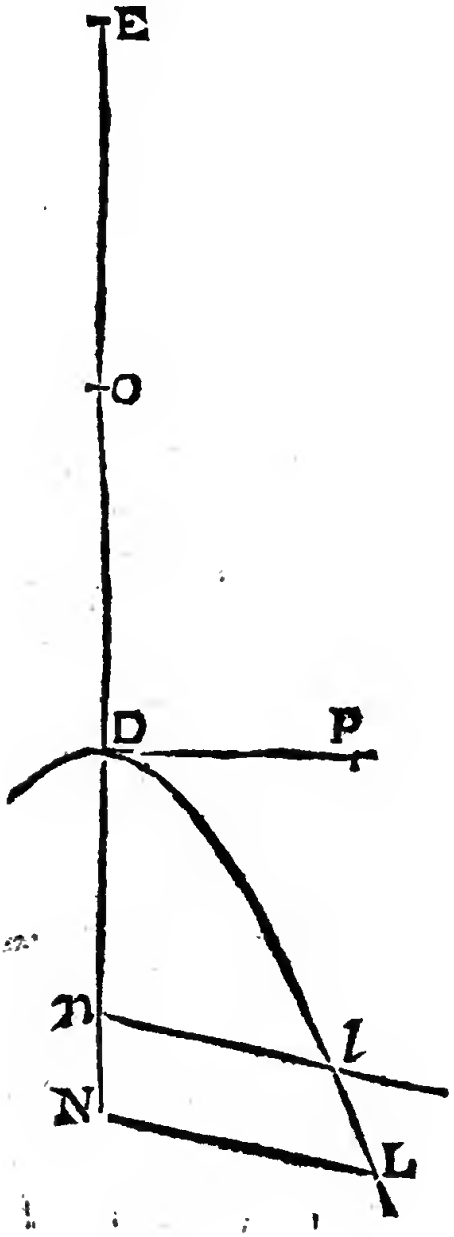
Soit une équation proposée

$\frac{axx}{b} \propto yy - dd.$

### *Construction.*

Je prens les parties de la tige O*n* à volonté $\propto y$, & les rameaux $nl \propto x$. Je fais OD & OE sur la tige $\propto$ chacune à *d*. Je dis que l'Hyperbole D*l*L qui a pour diametre la ligne ED, & pour parametre la ligne DP qui est à ED comme *b* à *a*, & dont les ordonnées à ce diametre sont paralleles aux rameaux *nl*, est le lieu requis.

*Démonſtration.*



Par quelque neud N ayant mené le rameau NL ; *à cauſe de l'Hyperbole*, le quarré de NL eſt au rectangle EN, ND ou bien au quarré de ON moins le quarré de OD, ce qui luy eſt égal, comme PD à DE, & en termes analytiques $xx \mid yy - dd \parallel b \mid a$, d'où vient l'équation $\frac{axx}{b} \propto yy - dd$, qui eſt celle qui étoit propoſée & qu'il falloit conſtruire.

Sil'équation étoit $xx \propto yy - dd$, ce qui arrive lorſque $a$ & $b$ ſont égales, il faudroit prendre pour la conſtruction le parametre DP $\propto$ au diametre ED, & l'Hyperbole D*l*L ſeroit le lieu requis, dont la démonſtration s'en feroit comme la precedente.

## 2. EXEMPLE.

Soit une équation propoſée

$$yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd.$$

Je prens ſuivant la regle de la pre-

miere reduction $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$ & l'Equation ſera

$$zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bxc}{a} - 2c \propto \frac{fxx}{a} + 2x + dd$$

qui eſtant multipliée par $aa$, & le produit diviſé par $bb + af$ afin que $x$ demeure ſans fraction, & eſtant miſe en ordre elle ſera

$$\frac{aazz - 2acc - 2add}{bb + af} \propto xx + \frac{aaex + 2abcx}{bb + af}$$

Je prens encore $v \propto x + \frac{\frac{1}{2}aae + abc}{bb + af}$ & mettant la valeur de $x$ & celle de ſon quarré à ſa place dans l'Equation ſuivant la regle de la reduction, elle ſera reduite à

$$\frac{aazz}{bb + af} \propto vv - \frac{\frac{1}{4}a^4ee - a^3cbc - aabbcc}{b^4 + 2bbaf + aaff} + \frac{aacc + aadd.}{bb + af}$$

Mais ſi la ſomme des quantitez connuës de la ſeconde partie de cette

Equation n'eſt pas negative, c'eſt à dire ſi ce qu'elle vaut enſemble eſt affecté du ſigne + il la faut tranſporter dans la premiere partie de l'Equation, & alors elle aura le ſigne moins ; mais il faudra que $z$ y ſoit ſans fraction; c'eſt pourquoy il faudra multiplier toute l'Equation par $bb+af$ & diviſer le produit par $aa$, ce qui donne lieu à l'Equation ſuivante

$$-cc-dd+\frac{\frac{1}{4}aace+aebc+bbcc}{bb+af} \propto \frac{bbvv+afvv}{aa}$$

& faiſant $qq \propto bb+af$; & $pp \propto cc-dd+\frac{1}{4}aace+\frac{aebc+bbcc}{bb+af}$ ce qui eſt poſſible, car cette ſomme aura le ſigne — aprés cette tranſpoſition ſi elle ne l'avoit pas auparavant ; l'Equation ſera donc toute reduite à

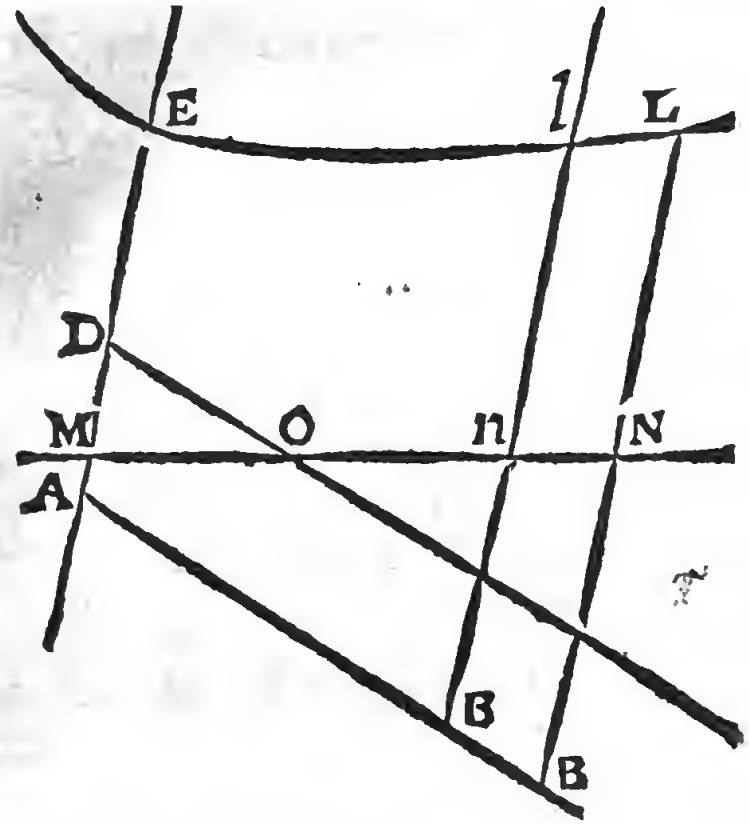
$$zz-pp \propto \frac{qqvv}{aa} \text{ ou bien } \frac{qqvv}{aa} \propto zz-pp$$

qui eſt un lieu à l'Hyperbole ſuivant la formule 5.

Si l'on n'avoit transposé, multiplié & divisé comme l'on a fait; l'on n'auroit point trouvé de formule qui correspondit à l'Equation comme elle estoit, mais toutes ces operations ne changent pas la nature de l'Equation, c'est pourquoy l'on peut toujours reduire ces sortes d'Equations à la Formule 5.

## *Conſtruction.*

Suppoſons que la derniere reduction & tranſpoſition eſt celle qui convient à l'Equation propoſée.




Suivant l'obſervation 7. Je prens O *n* pour les parties de la Tyge ∞ *x*, & les Rameaux *nl* ∞ *y* qui font avec la Tige quel angle on voudra.

A

A cauſe que $v$ eſt $\propto x + \frac{\frac{1}{2}aae + abc}{bb + af}$ je prens OM ſur la Tige prolongée $\propto \frac{-\frac{1}{2}aae + abc}{bl + af}$ ; M $n$ ſera donc $\propto v$ en quelque lieu que ſoit le neud $n$ : mais il y a auſſi dans la reduction $z \propto y + \frac{xb}{a} + c$ : c'eſt pourquoy par le point M je tire AMD indefiniment prolongée d'un côté & d'autre, & je fais comme $a$ eſt à $b$ ainſi OM à MD ; puis je mene DO, & je prens DA $\propto c$, & je tire AB parallele à DO ; $l$ B ſera donc $\propto z$, car $n$ B ſera par tous les neuds $\propto \frac{bx}{a} + c$, tous les neuds du lieu reduit ſeront donc ſur la ligne AB, & la Tige du lieu reduit qui eſtoit M $n \propto v$ doit eſtre changée en AB, & le point A ſera l'origine du lieu reduit ; & pour faire ce changement, on doit conſiderer que M $n$ eſt à AB, comme OM à OD ; ſoit

donc la raiſon de OM à OD (qui eſt donnée de poſition, car le triangle OMD eſt donné) comme $r$ à $ſ$, j'auray $\frac{ſv}{r}$ au lieu de $v$, & $\frac{ſſvv}{rr}$ au lieu de $vv$; c'eſt pourquoy ſuppoſons que le diametre du lieu changé eſt à ſon parametre, comme $m$ à $n$, j'auray $\frac{mſſvv}{nrr}$ ce qui doit eſtre $\propto \frac{qqvv}{aa}$ car l'autre partie du lieu reduit $zz - pp$ ne change point; multipliant donc par $rr$, & diviſant le produit par $ſſ$ il vient $\frac{mvv}{n} \propto \frac{qqrrvv}{aaſſ}$ ou bien $\frac{m}{n} \propto \frac{qqrr}{aaſſ}$ ce qui montre que la raiſon du diametre du lieu reduit changé à ſon parametre, que l'on avoit ſuppoſée eſtre comme $m$ à $n$, & qui eſtoit ſeulement dans le lieu reduit comme $qq$ à $aa$ eſt icy comme $qqrr$ à $aaſſ$ ou bien comme $qq$ à $\frac{aaſſ}{rr}$; le

lieu reduit ſera donc changé à

$\frac{qqrrvv}{aaff} \propto zz - pp.$

Je dis que l'Hyperbole E *l* L dont le point A eſt le centre, la ligne AE le demidiametre, la ligne AB parallele à ſes ordonnées, & la raiſon du diametre $\propto$ 2 AE à ſon parametre, *qq* à $\frac{aaff}{rr}$, eſt le lieu requis.

## *Démonſtration.*

Ayant mené quelque rameau NL, *par la propriété de l'Hyperbole*, le quarré de BL moins le quarré de AE eſt au quarré de AB, comme le diametre $\propto$ 2 AE à ſon parametre, ce qui eſt en termes Analytiques en ſe ſervant des meſmes caracteres que dans la conſtruction $yy + \frac{2bxy}{a} + 2yc + \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} + cc - pp$

pas beſoin d'une explication plus ample, aprés ce qui en a eſté dit dans le premier Exemple de ces lieux aux Hyperboles ; car la conſtruction & la démonſtration ſeroit la même que la precedente.

Je ne m'étendray pas plus au long ſur ce ſujet, étant tres-perſuadé que j'en ay dit aſſez pour ceux qui auront pû m'entendre, & que je n'en pourois dire que trop peu, quelque long que je fuſſe, pour ceux qui n'ont pas entendu ce que j'en ay dit juſques-icy.

*Fin du Traitté des Lieux.*

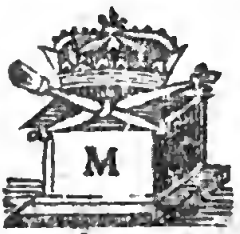
# LA CONSTRUCTION DES EQUATIONS ANALYTIQUES.

*Par Monſieur* DE LA HIRE,
*de l'Academie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë S. Jacques, à l'Occaſion.

M. DC. LXXIX.
*Avec Permiſſion.*

# PREFACE.



*Monſieur Deſcartes ayant propoſé au commencement de ſon premier Livre de la Geometrie, la maniere de conſtruire les Equations quarrées; il enſeigne dans le troiſiéme celle des Cubiques, & quarré-quarrées; & il dit que l'on peut toûjours trouver la racine de ces Equations par l'une des trois ſections coniques, laquelle que ce ſoit, ou meſme par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puiſſe eſtre, en ſe ſervant au reſte de lignes droites & de cercles, ce ſont ſes propres termes: mais il ſe contente enſuite de donner une regle pour les trouver par le moyen d'une Parabole, à cauſe qu'elle eſt en quelque façon la plus ſimple. Et aprés cela il propoſe une methode generale pour conſtruire toutes les Equations qui ne ſur-*

*paſſent pas ſix Dimenſions, avec une ligne du ſecond genre & le cercle qui eſt du premier, & il avertit qu'il eſt impoſſible de conſtruire des Equations plus compoſées avec les meſmes lignes; & qu'à proportion que les degrez des inconnuës de l'équation propoſée, s'augmentent, en donnant à chaque degré deux Dimenſions, il faut des lignes courbes d'un genre plus compoſé avec le cercle ou une autre ligne du premier.*

*Monſieur de Sluze un des grands Genies de ce ſiecle, non ſeulement dans la Geometrie, mais encore dans toutes les belles ſciences, nous a donné un Meſolable, & enſuite ſon Analyſe, où il fait voir la methode dont il s'eſtoit ſervy pour y parvenir, & à la fin une regle generale pour la conſtruction des Equations cubiques, & quarré-quarrées, qui ne conſiſte qu'en quelques exemples de ces conſtructions: car pour la methode il la cache exprés, à ce qu'il dit luy-même, afin qu'on ait le plaiſir de la chercher, & qu'il puiſſe en meſme-temps recon-*

*noître le ſentiment des Sçavans ſur ſon ouvrage, aprés quoy il promet de la donner avec pluſieurs autres choſes.*

*J'ay tâché de découvrir ce qui eſtoit caché dans cét Ouvrage, & à meſme temps j'ay rencontré une methode pour conſtruire toutes les Equations de quelle nature qu'elles ſoient, qui me ſemble devoir eſtre un peu differente de celle de Monſieur de Sluze; Et à la fin des exemples je fais voir combien Monſieur Deſcartes s'eſt trompé, lorſqu'il preſcrit les lignes les plus ſimples qui ſont neceſſaires pour la conſtruction des Equations de quelles Dimenſions qu'elles puiſſent eſtre, faute d'avoir aſſez examiné ce qu'il a avancé; car on ne peut ſe perſuader qu'un homme auſſi éclairé qu'il eſtoit dans la Geometrie, ait fait une telle faute, que pour n'avoir pas aſſez conſideré les cas dont il a parlé. Et comme je faiſois voir à Monſieur Hugens de Zulichem les raiſons que j'avois de reprendre ainſi Monſieur Deſcartes, il m'a communiqué un Ma-*

*nuſcrit de Monſieur de Fermat, d'une maniere de conſtruction des Equations, dans laquelle il le reprend auſſi ſur le meſme ſujet ; mais quoy que ſon invention ſoit fort ingenieuſe, il fait voir dans les exemples qu'il rapporte qu'il n'avoit pas découvert la plus ſimple methode, & que celle de Monſieur Deſcartes, dans les Problemes qu'il a conſtruits, eſt meilleure que la ſienne ; mais il montre dans les autres exemples, que l'on pouvoit conſtruire plus ſimplement ceux dont il n'avoit jugé que par induction, & je fais voir auſſi qu'on peut conſtruire plus ſimplement que n'a fait Monſieur de Fermat quelques-unes des Equations qu'il propoſe, leſquelles Monſieur Deſcartes n'a point conſtruites.*

*Avec ma methode j'ay conſtruit les plus beaux Problemes qui ayent eſté propoſez juſques à preſent, entre leſquels eſt celuy de la Perpendiculaire d'un point donné, menée à une Ellipſe ou à une Hyperbole : car pour la Parabole, il y a long-temps que Monſieur*

*Hugens l'a publiée, en ne ſe ſervant d'autre ſection conique que de celle qui eſt propoſée; ce que j'ay mis il y a déja du temps dans les Regiſtres de l'Academie des Sciences.*

*Ayant eſté ſollicité pluſieurs fois de donner au public ce que j'avois fait ſur ce ſujet, j'ay crû qu'auparavant j'eſtois obligé de ſçavoir de Monſieur de Sluze s'il n'eſtoit pas dans la reſolution de s'aquiter de ſa promeſſe, & que je ne devois pas luy ſervir de pretexte pour oſter aux Sçavans l'occaſion de profiter de ſes belles penſées: mais il m'a fait ſçavoir qu'il n'avoit ny le loiſir, ny la volonté de rien publier davantage ſur cette ſcience. C'eſt ce qui m'a fait reſoudre de joindre ce que j'en ay fait aux Elemens des ſections coniques, & à la conſtruction des lieux, puiſque la conſtruction des Equations en eſt une application, & en quelque façon le principal uſage dans la Geometrie. I'y donne des Démonſtrations de toutes les operations Analytiques dont on ſe ſert, &*

*avec les remarques que j'y joins, & l'exemple entier de la Perpendiculaire d'un point donné à une ſection conique avec la meſme ſection, je ne croy pas qu'il reſte aprés cela aucune difficulté à ceux qui ſe donneront la peine de l'examiner avec un peu d'application.*

# METHODE
## DE LA
# CONSTRUCTION
## DES
# EQUATIONS.

PUISQUE la rencontre de deux lignes, de quelle nature qu'elles puiſſent eſtre, déterminent un point commun à chacune de ces lignes en particulier; ſi ces deux lignes ſont des Lieux Geometriques, il eſt evident que les deux quantitez inconnuës de chacune, ſont déterminées par leur commune rencontre. Car ſi ces deux Lieux ſont differens ou ſeu-

lement differemment poſez, l'origine de l'un ne ſera pas celle de l'autre, ou les parties de la Tige & les Rameaux ne ſeront pas communs ; & ils ne ſe rencontreront qu'en quelques points ; C'eſt pourquoy les parties communes de ces deux Lieux pouvant s'exprimer dans chacun de differente maniere, & les quantitez inconnuës ou leurs parties dans l'un & dans l'autre ayant meſmes noms, on en peut faire ſortir une dans une des Equations, par le moyen de l'Equation de l'autre, & il reſtera enfin une Equation dans laquelle il n'y aura plus qu'une ſeule inconnuë, comme ſont celles que je ſuppoſe que l'on doit conſtruire par cette Methode.

Si l'on peut donc tirer d'une Equation propoſée deux Lieux qui contiennent enſemble toutes les quantitez connuës qu'elle renferme, & ſans leſquelles elle ne ſeroit pas entierement déterminée ; On voit claire-

ment que la conſtruction de ces deux Lieux combinée enſemble, déterminera par leur rencontre la quantité inconnuë de l'Equation propoſée, & c'eſt dans la maniere de tirer ces Lieux, que conſiſte toute cette Methode : Mais il faut prendre garde de ne ſe pas ſervir de Lieux d'un genre plus compoſé qu'il n'eſt neceſſaire pour la Conſtruction d'une Equation propoſée, quoy que bien ſouvent ils paroiſſent les plus ſimples pour la ſolution d'un Probleme, comme par exemple ce ſeroit une faute conſiderable dans la Geometrie d'employer les Sections Coniques pour la conſtruction d'un Probleme ou d'une Equation plane où il ne faut qu'un cercle & des lignes droites ; de meſme que pour conſtruire une Equation Cubique ou quarré-quarrée, d'employer une ligne du ſecond genre.

Dans les Equations planes ou la quantité inconnuë ne ſurpaſſe pas

deux dimenſions, il n'eſt pas neceſſaire d'en tirer deux Lieux pour en faire la conſtruction, quoy qu'en effet elle ſe faſſe par la combinaiſon des lieux au cercle & à la ligne droite, il ſuffit de faire evanoüir le ſecond terme de l'Equation, afin qu'il ne reſte plus qu'une ligne connuë egale à l'inconnuë que l'on cherche plus ou moins une autre connuë, ce qui ſe reduit à l'extraction d'une racine quarrée, que l'on trouve par le moyen du cercle & de la ligne droite.

Mais dans les Equations plus compoſées il n'en eſt pas de meſme; car dans les Cubiques, ou quarré-quarrées il faut au moins deux lignes courbes du premier genre qui ſont deux lieux, qui par leur rencontre determinent les quantitez inconnües de chacun; ce qui ſe peut connoiſtre en prenant deux des Equations à ces lieux & par le moyen de l'une en faiſant ſortir une des inconnües de l'autre, & l'on aura tout au plus une

Equation Cubique ou quarré-quarrée ; & les differentes combinaiſons des lieux aux lignes courbes du premier genre donnant les formulles auſquelles ſe peuvent reduire toutes les Equations Cubiques ou quarré-quarrées, il ſeroit fort inutile d'aller chercher des lignes d'un genre plus compoſé pour faire la conſtruction de ces meſmes Equations, ce qui ne ſe pourroit pas faire avec une de ces meſmes lignes courbes, & une ligne droite ; car par le moyen de leurs Equations on ne pouroit avoir qu'une Equation plane d'une ſeule inconnüe ; c'eſt pourquoy ceux qui cherchent la duplication du cube ou la Triſection de l'angle avec des cercles & des lignes droites, ſe tourmentent fort inutilement ; puiſque l'on vient toûjours à des Equations ſolides qui ne peuvent eſtre reduites en aucune maniere.

Si dans l'Equation propoſée la

quantité inconnüe monte à 5, 6, 7, ou 8 Dimenſions, il faut une ligne du premier genre, avec une du ſecond; ſi elle va juſques à douze, on le peut faire avec une ligne du premier avec une du troiſiéme, ſi elle va juſques à ſeize, avec une ligne du premier avec une du quatriéme, & ainſi de ſuite en augmentant toûjours de quatre.

Mais on peut auſſi conſtruire ces Equations par deux lignes courbes dont l'une ſera moindre que la plus haute, & l'autre plus haute que celle du premier.

Et l'on peut encore abreger en quelque façon cette regle, ſi l'on a ſimplement égard aux Dimenſions des deux inconnües qui compoſent les lieux ſans conſiderer leurs degrez; ce qui ſe verra dans les Exemples.

Pour tirer d'une équation propoſée où il n'y a qu'une ſeule inconnüe, les lieux les plus ſimples qui la puiſſent

conſtruire, il faut d'abord conſiderer la plus haute dimenſion de ſa quantité inconnüe, comme par exemple dans l'équation $x^4 - ax^3 + abxx + aadx - a^3f \propto o$, où la quantité inconnüe $x$ a quatre dimenſions; & ſuppoſer un rectangle $iy$ fait de la ligne $i$ connüe que l'on peut prendre de quelle grandeur on voudra, & d'une inconnüe $y$, lequel rectangle ſoit égal à $xx$, ce qui ſe peut faire comme il a eſté démontré dans les Obſervations ſur la Conſtruction des Lieux: & ſi l'on met dans l'Equation propoſée cette valeur $iy$ à la place de $xx$, non pas par tous les termes où il ſe trouve ſi l'on ne veut, mais en partie, on aura à la place de l'Equation propoſée, un lieu, à cauſe des deux inconnües $x$ & $y$ qui s'y rencontreront, & ſubſtituant $iy$ differemment, c'eſt à dire par tout ou en partie à la place des $xx$ de l'Equation propoſée, on a pluſieurs lieux, leſquels étant com-

binez enſemble, en donnent une infinité d'autres : leſquels ne doivent pas pourtant ſurpaſſer le genre le plus ſimple qui doit ſervir à la conſtruction de l'Equation, car autrement ce ne ſeroit rien faire, comme on peut voir dans cet Exemple. Si à la place d'un $xx$, dans le premier terme on ſubſtituë ſa valeur $iy$, on aura $iyxx$, qui ſera un terme d'un lieu du ſecond genre, car les inconnuës enſemble y montent à trois dimenſions, ce qu'il ne faut pas faire dans cet exemple; c'eſt pourquoy à la place de $x^4$ il faudra mettre $iiyy$, qui ſera un terme d'un lieu du premier genre : de même ſi l'on ne mettoit pas dans le ſecond terme $iy$ à la place de $xx$ pour avoir $iyx$, qui eſt auſſi un terme d'un lieu du premier genre, on tomberoit encore dans la même faute, & ainſi du reſte.

Mais ſi au lieu d'avoir ſuppoſé d'abord $iy \propto xx$, on avoit fait $iiy \propto x^3$, ce

ce qui ſe pouvoit auſſi ſuppoſer, on n'auroit pas pû par le moyen de ce ſolide égal à $x^3$, tirer de l'Equation propoſée pluſieurs lieux du premier genre pour les combiner pour la conſtruction, car on en auroit trouvé du premier & du ſecond qui ne doivent point être employez dans la conſtruction d'une Equation quarré-quarrée ou cubique, puiſqu'on la peut conſtruire plus ſimplement.

Lorſque les dimenſions de la quantité inconnuë ne montent pas aſſez haut pour en tirer les lieux que l'on ſouhaitte, on peut multiplier l'Equation par la même quantité inconnuë, mais il faut prendre garde qu'étant ainſi multipliée, on en puiſſe tirer ſeulement les lieux neceſſaires pour ſa conſtruction, ce qui ſe doit entendre de ceux du genre qui luy convient. Comme par exemple on ne pouroit pas tirer d'une Equation cubique tous les lieux du premier genre, c'eſt pourquoy on la multiplie

par la racine de ſa quantité inconnuë, ſans que pour cela l'on tombe dans aucune faute, puiſqu'il n'eſt pas neceſſaire de lieux moins compoſez pour la conſtruction d'une Equation cubique, que pour celle d'une quarré-quarrée ; c'eſt pourquoy on n'a pas beſoin de multiplier une Equation quarré quarrée par ſa racine, pour trouver tous les lieux du premier genre, & ainſi des autres.

On voit par ce moyen que l'on peut avoir une infinité de lieux de la même eſpece ; car la quantité connuë & indéterminée que l'on a poſée, pouvant être priſe de quelle grandeur on voudra, changera le lieu ſans en changer l'eſpece, mais cela ne donne pas dans le premier genre tous les lieux que l'on peut ſouhaitter de la même eſpece, hormis la Parabole, le Cercle, & l'Hyperbole équilatere, qui ſont des lignes courbes toutes ſemblables à elles-mêmes.

C'eſt pourquoy ſi le lieu eſt donné

avec lequel il faut conſtruire l'Equation, & que ce ſoit une Parabole, un Cercle, ou une Hyperbole équilatere, il ſuffira d'introduire dans l'Equation propoſée une ſeule quantité indéterminée, telle que l'on a fait *i*: mais ſi c'eſt une Ellipſe, ou une Hyperbole non équilatere, il faut introduire dans les lieux que l'on tire de l'Equation propoſée deux quantitez indéterminées, afin que le lieu que l'on a tiré, qui eſt de la même eſpece que celuy qui eſt propoſé, ſoit le même que celuy-cy, ce qui ne ſe pouroit pas faire autrement: car il faut neceſſairement que la raiſon du parametre au diametre ſoit celle qui eſt donnée, & cela eſt impoſſible à moins qu'il ne ſe trouve une quantité indéterminée que l'on puiſſe prendre telle que l'on voudra dans les quantitez connuës qui déterminent la raiſon du diametre au parametre. Mais ce n'eſt pas encore aſſez, il faut que le quarré des quantitez connuës du lieu trouvé,

dont la racine détermine la grandeur de la moitié du diametre, ſoient égales à la même quantité qui luy répond dans le lieu propoſé : c'eſt pourquoy il faut faire en ſorte que l'on ait encore une autre indéterminée, qui ne ſe trouve point dans les quantitez qui déterminent la raiſon du diametre au parametre, afin que la premiere étant déterminée par cette raiſon, la ſeconde puiſſe être priſe telle qu'il eſt neceſſaire, pour compoſer avec les autres connuës la valeur du demi-diametre donné.

D'où l'on connoît que dans la Parabole dont le diametre n'eſt pas déterminé, & dans le Cercle & l'Hyperbole équilatere dont tous les diametres ſont égaux à leurs parametres, il n'eſt pas neceſſaire de la premiere indéterminée ſuppoſée, puiſqu'il n'y a nulle quantité qui détermine la raiſon du diametre à ſon parametre, qui eſt une raiſon d'égalité. C'eſt pourquoy dans le Cercle & dans l'Hyper-

bole équilatere, il ſuffit d'une ſeule indéterminée pour faire le diametre du lieu trouvé égal à celuy qui eſt donné, & dans la Parabole où il n'y a qu'à déterminer la grandeur du parametre; Et dans tous les lieux aux Hyperboles telles qu'elles ſoient entre leurs aſymptotes, à cauſe de la proprieté particuliere de ces lignes; ce qui n'a point de lieu dans cette Methode, où on les ſuppoſe toûjours à angles droits, qui ſont celles de l Hyperbole équilatere.

Il y a des cas où il n'eſt pas neceſſaire d'une ſi grande peine, mais on n'a pas deſſein dans cet Ouvrage de donner des exemples particuliers, ce qui ſe pouroit étendre à l'infiny, on trouvera ſeulement dans chacun des remarques generales qui donneront une entiere connoiſſance de cette Methode.

On trouvera auſſi dans les Exemples la maniere d'introduire dans l'Equation propoſée, deux inconnuës,

lorſqu'il eſt neceſſaire, avec les conditions requiſes, pour faire que le lieu ſoit à une Ellipſe, ou à une Hyperbole donnée : car on pouroit les y mettre de telle façon que l'on n'en tireroit aucune utilité, quoy qu'elles fuſſent comme il eſt requis ; dautant que pour en déterminer quelqu'une, on ſeroit obligé de ſe ſervir d'une Section Conique, c'eſt à dire que ſon Equation ſeroit cubique ou quarré-quarrée, ce qui ne ſerviroit à rien ; car elles doivent être toutes deux déterminées par des cercles, ou des lignes droites tout au plus.

Dans les Exemples ſuivans, on fait la Conſtruction des Equations cubiques, & quarré-quarrées toûjours avec un Cercle & une Section Conique ; parce que le Cercle eſt la ligne courbe la plus ſimple de toutes celles du premier genre.

On ne ſe ſert auſſi que des Axes des lieux pour leur conſtruction, à cauſe que le Cercle eſt toûjours combiné

avec une Section Conique, ce qui rend en general la chose plus simple.

On suppose dans le deuxiéme & dans le troisiéme Chapitre, des Exemples que le second terme de l'Equation proposée est évanoüy, ce qui est fort facile à faire s'il ne l'est pas par la nature de l'Equation.

Il n'y a point dans ce Traitté de Regles particulieres pour la diversité des signes + ou — dont les termes des Equations sont affectez: mais on apporte assez d'Exemples pour ne laisser aucune difficulté sur ce sujet.

Si l'on veut resoudre par la voye la plus simple un Probleme cubique, ou quarré-quarré de sa nature, dans lequel on propose un Cercle, on doit chercher une Equation avec deux inconnuës qui comprennent un angle, & cette Equation sera celle d'un lieu à une Section Conique, qui sera sans doute la plus simple de toutes celles qui peuvent donner la solution du

Probleme avec le Cercle proposé. Ce n'eſt pas qu'en ſe ſervant de cette Methode on ne puiſſe conſtruire l'Equation propoſée avec toutes les Sections Coniques & le Cercle propoſé.

Mais ſi dans le Probleme propoſé il y a une Section Conique, on cherchera d'abord avec deux inconnuës le lieu au Cercle, & ſi on ne peut pas le trouver aiſément, on conſtruira l'Equation tirée de la propoſition ſelon les Regles de cette Methode, & l'on poura découvrir dans cette conſtruction quelque chemin pour venir d'abord au lieu que l'on a cherché.

Pour la Combinaiſon des lieux pour en tirer des Equations differentes, on remarquera en general, que deux lieux à la Parabole dont les parties de la tige de l'une n'ont pas même caractere que les parties de la tige de l'autre, étant combinez affirmativement ou negativement, donneront des lieux au Cercle, & à une infinité d'Ellipſes & d'Hyperboles. Par

exemple $yy - ay + bx \propto o$, & $ay - xx \propto o$, ſont deux lieux à la Parabole, dont les parties de la tige de la premiere ſont $\propto x$, & celles de la ſeconde $\propto y$, qui étant combinez affirmativement, donneront $yy - ay + bx + ay - xx \propto o$, qui ſe réduit à $yy - xx + bx \propto o$, qui eſt un lieu à une Hyperbole équilatere : mais étant combinez negativement, ils donneront $yy - ay + bx - ay + xx \propto o$, qui ſe réduit à $yy - 2ay + xx + bx \propto o$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe ou au Cercle, ſi l'angle que contiennent les inconnuës eſt droit, & ſi l'on multiplie l'un des deux par quelque nombre que ſe ſoit 2, 3, 4, 5, &c. ou par quelque quantité, & qu'on diviſe le produit par une autre, avant la combinaiſon, on aura une infinité de lieux à des Hyperboles & à des Ellipſes. On fera encore la même choſe par la combinaiſon d'un lieu à la Parabole, avec un lieu à l'Hyperbole équilatere, ou au Cercle.

On peut changer en un lieu au Cercle ceux qui ſont à l'Ellipſe, & en un à l'Hyperbole équilatere ceux qui ſont à l'Hyperbole. Car par exemple, ſi l'on a $\frac{aaxx}{bb} \propto dd - yy$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe, on peut ſuppoſer $zz$ inconnuë $\propto \frac{aaxx}{bb}$ ou bien $\frac{zzbb}{aa} \propto xx$, & par conſequent on aura $zz \propto dd - yy$, qui eſt un lieu au Cercle; mais auſſi il faut changer dans les autres lieux que l'on veut combiner avec celuy-cy, $xx$ en ſa valeur $\frac{zzbb}{aa}$, & $x$ en $\frac{zb}{a}$; & enfin la valeur de $z$ étant trouvée, on aura celle de $x$ en faiſant comme $a \mid b \parallel z$ trouvée $\mid x$ que l'on cherche.

Dans toutes les conſtructions de deux lieux combinez enſemble, il n'importe pas lequel ſoit conſtruit le premier, quoyque dans les Exemples ſuivans le Cercle y ſoit conſtruit le

dernier, ce qui eſt tres-indifferent, car on n'en pouroit tirer aucun avantage.

Mais on doit remarquer que les lieux que l'on tire le plus facilement d'une Equation propoſée, en donnent ordinairement la conſtruction la plus ſimple.

# CHAPITRE I.

## DE LA CONSTRUCTION DES EQUATIONS QUARRE'ES.

LES Equations quarrées ſont de deux ſortes ; la premiere, où la quantité inconnuë ne monte que juſques au quarré ; la ſeconde, où elle monte au quarré-quarré, mais qui n'a au ſurplus que la ſeule dimenſion du quarré dans les autres termes de l'Equation : comme par exemple $x^4 - aaxx - a^3b \propto o$, que l'on peut toûjours réduire à la premiere en prenant une autre inconnuë comme $y$, qui avec la connuë $a$, faſſe le rectangle $ya \propto xx$, & ſubſtituant cette valeur à la place de $xx$ dans l'Equation, on la réduit à $yy - ay - ab \propto o$, & aprés que l'on aura trouvé la valeur de $y$, la moyenne proportionnelle entre $y$ & $a$, ſera la valeur de $x$

que l'on cherche ; c'eſt pourquoy on ne donnera des Exemples que des ſimples Equations planes ou quarrées.

## 1. EXEMPLE.

* Soit une Equation propoſée $xx - ax - ab \propto o$.

Ayant pris l'inconnuë $z \propto x - \frac{1}{2}a$, pour faire évanoüir le ſecond terme de l'Equation, on la réduira à $zz \propto \frac{1}{4}aa + ab$ ; & ayant décrit un demi cercle dont le diametre ſoit égal à $a, + \frac{1}{2}a + b$, qui eſt la ſomme des deux côtez du rectangle $\propto \frac{1}{4}aa + ib$ ; la perpendiculaire au diametre élevée dans le demi cercle, par le point de ce diametre qui en retranche la grandeur $a$ égale à l'un des côtez du rectangle, ſera le côté du quarré égal à ce même rectangle $\frac{1}{4}aa + ab$, & par

* *Il n'y a point de Figure dans ces Exemples, car ils ſont aſſez faciles à entendre ſans cela.*

conſequent auſſi $\propto z$, auquel ſi on luy ajoûte $\frac{1}{2}a$, la ſomme ſera égale à la quantité $x$ inconnuë dans l'Equation propoſée.

## 2. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée $xx + ax - ab \propto 0$.

Ayant pris comme cy-devant l'inconnuë $z \propto x + \frac{1}{2}a$, on aura $zz \propto \frac{1}{4}aa - ab$, & ayant décrit de même le demi cercle pour trouver le côté du quarré $\propto \frac{1}{4}aa + ab$, lequel côté doit être auſſi $\propto z$, ſi on en retranche $\frac{1}{2}a$, on aura la valeur de $x$ propoſée.

## 3. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée $xx - ax + ab \propto 0$.

Ayant pris $z \propto x - \frac{1}{2}a$, on aura $zz \propto \frac{1}{4}aa - ab$; & ayant trouvé le côté d'un quarré $\propto \frac{1}{4}aa - ab$ qui

doit être $\propto z$, si on luy ajoûte $\frac{1}{2}a$, on aura la valeur de $x$ proposée.

On doit remarquer que dans le premier exemple, & dans le troisiéme, à cause que le second terme est affecté du signe —, on peut prendre indifferemment $x - \frac{1}{2}a$, ou bien $\frac{1}{2}a - x \propto z$, pour faire évanoüir le second terme de l'Equation; car que l'on prenne l'un ou l'autre la réduction sera toûjours la même: c'est pourquoy la valeur de $z$ étant trouvée, on peut prendre $x \propto z + \frac{1}{2}a$, ou bien $x \propto \frac{1}{2}a - z$, ce qui fait que l'on a deux differentes valeurs affirmatives de $x$ dans le troisiéme exemple, où $\frac{1}{2}a$ est toûjours plus grand que $z$, car $zz$ y est $\propto \frac{1}{4}aa - ab$: mais dans le premier exemple, où $\frac{1}{2}a$ est toûjours plus petit que $z$, on ne peut avoir qu'une seule valeur positive ou affirmative de $x$, qui est $z + \frac{1}{2}a$; & une negative qui est $\frac{1}{2}a - z$.

# CHAPITRE II.

## DE LA CONSTRUCTION DES EQUATIONS CUBIQUES.

## PREMIERE PARTIE.

*De la Construction des Equations Cubiques avec toutes les Sections Coniques prises à volonté, & combinées avec le Cercle.*

### 1. EXEMPLE.

SOIT une Equation proposée $x^3 * - aax + aab \propto 0$.

L'on peut prendre l'inconnuë $y$ qui avec la connuë $a$ fasse le rectangle $ay \propto xx$, *suivant l'Observation 2. sur la Construction des Lieux*; & mettant cette valeur dans l'Equation proposée à la place de $xx$, on aura $ayx - aax + aab \propto 0$, qui se réduit à

I. Equation $yx - ax + ab \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

Et multipliant cette premiere Equation par $x$, on a $yxx - axx + abx$, & à la place du premier $xx$ ſubſtituant ſa valeur $ay$, on a $ayy - axx + abx \propto o$; qui ſe réduit à

II. $yy - xx + bx \propto o$, qui eſt un lieu à une Hyperbole équilatere. Et dans cette ſeconde Equation à la place de $xx$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

III. $yy - ay + bx \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole. Et combinant la ſeconde & la troiſiéme affirmativement, on a

IV. $2yy - ay - xx + 2bx \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole. Mais les combinant negativement, on a $yy - xx + bx - yy + ay - bx \propto o$, qui ſe réduit à

V. $ay - xx \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole. Et combinant negativement la troiſiéme & la cinquiéme, on a

VI. $yy - 2ay + xx + bx \propto o$, qui eſt un lieu au Cercle. Mais multipliant la cinquiéme Equation par $a$, & la diviſant par $b$, on aura

VII. $\frac{axx}{b} - \frac{aay}{b} \propto o$, qui eſt toûjours un lieu à la Parabole; & combinant la ſixiéme & la ſeptiéme negativement, on a

VIII. $yy - 2ay - \frac{aay}{b} + xx + \frac{axx}{b} + bx \propto o$, qui eſt un lieu à une Ellipſe; Et combinant affirmativement la troiſiéme & la ſeptiéme, on aura

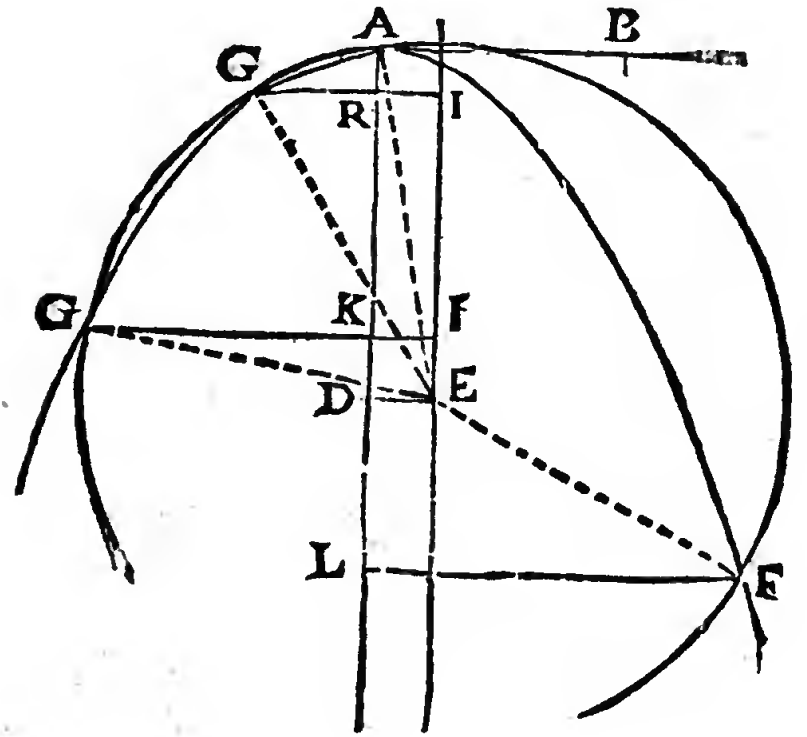
IX. $yy - ay + \frac{aay}{b} - \frac{axx}{b} + bx \propto o$, qui eſt un lieu à une Hyperbole.

Et combinant en ſuivant cette Methode, le double, le triple, le quadruple, &c. des unes avec les autres affirmativement ou negativement, on trouvera une infinité d'Equations differentes, qui ſeront des lieux aux Sections Coniques & au Cercle, dont

la conſtruction de deux enſemble donnera celle de l'Equation propoſée.

## CONSTRUCTION
### DE L'EQUATION PROPOSE'E, AVEC LA PARABOLE ET LE CERCLE COMBINEZ ENSEMBLE.

*En ſe ſervant de la cinquiéme & ſixiéme Equation.*



La cinquiéme Equation $ay \propto xx$ ſera conſtruite ſi l'on décrit la Parabole FAG, dont AD ſoit l'axe, & AB ſon parametre $\propto a$.

Mais pour la conſtruction de la ſixiéme Equation $yy - 2ay + xx + bx \propto o$, il en faut faire la réduction en prenant $z \propto y - a$ ou bien à $a - y$, ce qui eſt la même choſe dans la réduction, & $v \propto x + \frac{1}{2}b$, & elle ſera réduite à $zz \propto aa + \frac{1}{4}bb - vv$, d'où l'on connoît que pour conſtruire le Cercle, en ſorte que ſes rameaux & ſes parties de la tige ayent même nom que ceux de la Parabole, il faut prendre AD ſur l'axe de la Parabole $\propto a$, à cauſe que dans le lieu à la Parabole le point A eſt l'origine, & l'axe AD eſt la tige dont les parties AK, AL ſont $\propto y$, & que dans la réduction du Cercle $y - a$, ou $a - y$ eſt $\propto z$, car on aura DL ou DK $\propto z$; mais à cauſe que dans la Parabole les rameaux KG, qui ſont les ordonnées à l'axe, ſont $\propto x$, & que dans la réduction

du Cercle on a $x+\frac{1}{2}b \propto v$, il faut mener DE perpendiculaire à AD, & $\propto \frac{1}{2}b$; & par le point E ayant mené EI parallele à AD, il eſt évident que toutes les GK prolongées juſques à EI en I, ſeront $\propto x+\frac{1}{2}b$ qui eſt $\propto v$: c'eſt pourquoy le point E doit être le centre du Cercle requis GGAF dont le demi-diametre doit être $\propto \sqrt{aa+\frac{1}{4}bb}$ qui eſt $\propto$ EA, c'eſt pourquoy ce Cercle paſſera en A.

Je dis que les perpendiculaires GK, FL à l'axe de la Parabole menées des points de rencontre avec le Cercle, ſont les racines de l'Equation propoſée $\propto x$; & ſi le Cercle la rencontre aux quatre points G, G, A, F, les rameaux GK ſont les vrayes racines, & FL la fauſſe qui doit être égale toute ſeule aux deux vrayes jointes enſemble. Ce que j'ai démontré fort ſimplement à la maniere des Anciens, & ce qui eſt évident à cauſe que l'Equation n'a pas de ſecond terme: & ſi le Cercle touchoit la Parabole au point

G, les vrayes racines de l'Equation seroient égales entr'elles, & chacune $\propto \frac{1}{2}LF$, & l'Equation proposée pouroit être réduite à une Plane.

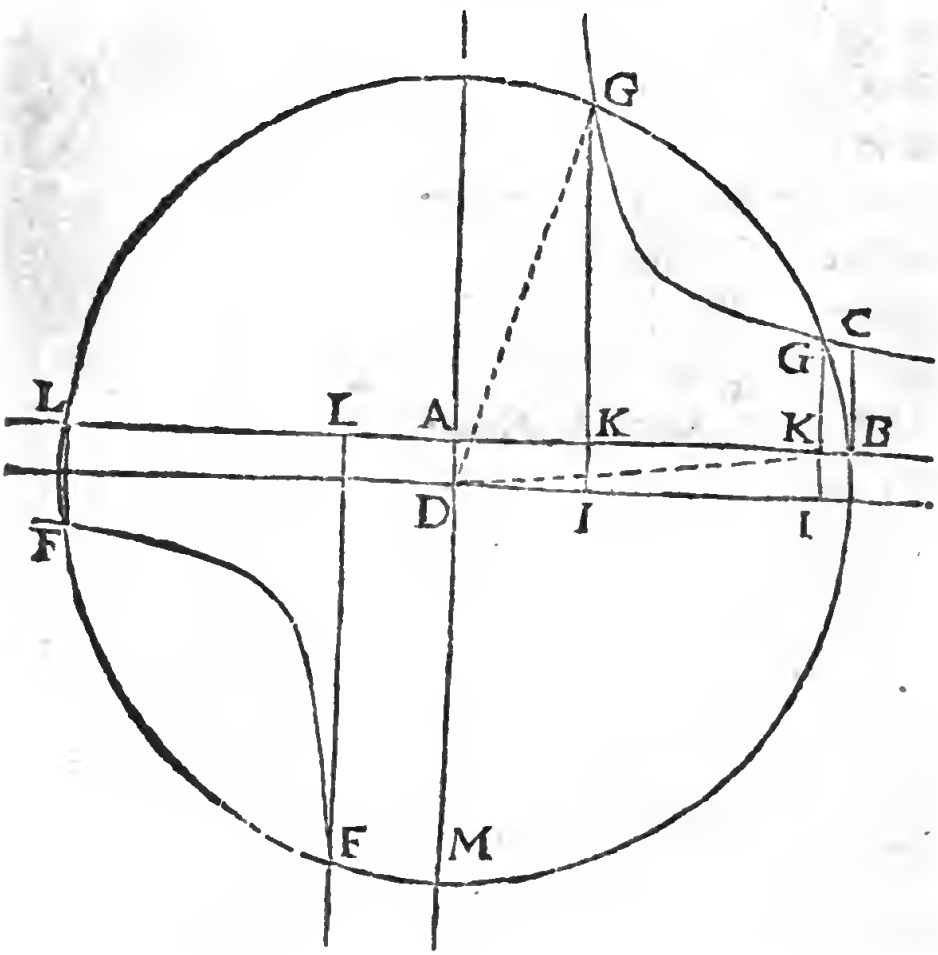
## DEMONSTRATION.

Soit $AK \propto y$, $KG \propto x$. A cause de la Parabole, le rectangle AB, AK est égal au quarré de KG, ce qui est en termes analytiques $ay \propto xx$. Et à cause du Cercle, les deux quarrez de GI & de EI, ou DK, sont ensemble égaux au seul quarré de EG ou de EA, ce qui est en termes analytiques $xx + bx + \frac{1}{4}bb + aa - 2ay + yy \propto aa + \frac{1}{4}bb$, ce qui se réduit à $xx + bx + yy - 2ay \propto o$: mais à cause de la Parabole qui a donné $ay \propto xx$, ou bien $\frac{xx}{a} \propto y$; si dans l'Equation trouvée à cause du Cercle $xx + bx + yy - 2ay \propto o$, on substituë à la place de $y$ cette valeur $\frac{xx}{a}$, & à la place de $yy$ son

quarré $\frac{x^4}{aa}$, on aura $xx + bx + \frac{x^4}{aa} - \frac{2axx}{a} \propto o$, qui se réduit à $x^3 - aax + aab \propto o$, qui est l'Equation proposée qu'il falloit construire.

# CONSTRUCTION
## AVEC UNE HYPERBOLE EQUILATERE ET LE CERCLE.

*En se servant de la premiere & de la sixiéme Equation.*




La

La premiere Equation $ax - yx \propto ab$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, qui étant ſuppoſez à angles droits, l'Hyperbole eſt équilatere.

Ayant pris $t \propto a - y$, on aura l'Equation réduite $tx \propto ab$. Les lignes AB, AM étant à angles droits, & AB étant priſe $\propto a$; & BC parallele à AM menée par le point B, & $\propto b$. Les Hyperboles oppoſées GG, FF qui paſſent par le point C, & qui ont pour aſymptotes les lignes AB, AM, ſont le lieu de la premiere Equation, en ſorte que B ſera l'origine, & BK les parties de la tige $\propto y$, & les rameaux KG $\propto x$.

Maintenant pour la combinaiſon du Cercle, qui eſt la ſixiéme Equation, en ſe ſervant de la même réduction qui a eſté faite cy-devant pour la Parabole, il faut prendre ſur l'aſymptote AM, la partie AD $\propto \frac{1}{2}b$, & du point D pour centre & demi-diametre DB, ayant décrit le Cercle

BGF, qui rencontre les Hyperboles oppoſées aux points G & F, ce Cercle eſt la conſtruction de la ſixiéme Equation; & je dis que les perpendiculaires GK menées des points de rencontre de l'une des Hyperboles & du Cercle ſur l'aſymprote AB, ſont les vrayes racines de l'Equation propoſée $\propto x$, & les perpendiculaires FL menées auſſi des points de rencontre de l'autre Hyperbole F, ſur la même aſymptote, ſont les fauſſes racines.

## DEMONSTRATION.

Soit BK $\propto y$, & KG $\propto x$. A cauſe des aſymptotes de l'Hyperbole, le rectangle AK. KG eſt égal au rectangle AB, BC; mais AB eſt $\propto a$: c'eſt pourquoy AK eſt $\propto a - y$, & BC eſt $\propto b$; on aura donc $ax - yx \propto ab$, qui eſt la premiere Equation propoſée du lieu aux aſymptotes.

Et à cauſe du Cercle, le quarré de

DI, plus le quarré de IG, eſt égal au quarré de DG, qui eſt auſſi égale à DB; & DA ou KI eſt $\propto \frac{1}{2}b$; c'eſt pourquoy on aura l'Equation $aa - 2ay + yy + xx + xb + \frac{1}{4}bb \propto \frac{1}{4}bb + aa$, laquelle ſe réduit à $yy - 2ay + xx + xb \propto o$, qui eſt la ſixiéme Equation du lieu au Cercle qu'il falloit conſtruire.

Par la premiere Equation $ax - yx \propto ab$, on a $y \propto a - \frac{ab}{x}$, & dans l'Equation au Cercle $yy - 2ay + xx + bx \propto o$ ſubſtituant à la place de $y$ & de $yy$ ſa valeur trouvée, & celle de ſon quarré, par le moyen de l'autre Equation, on a $aa - \frac{2aab}{x} + \frac{aabb}{xx} - 2aa + \frac{2aab}{x} + xx + xb \propto o$, qui ſe réduit à $x^4 + bx^3 - aaxx + aabb \propto o$, qui peut être diviſée par $x + b$, qui eſt un Binome qui contient une fauſſe racine de l'Equation, & le quotient ſera $x^3 - aax + aab \propto o$, qui eſt l'E-

quation propoſée qu'il falloit conſtruire.

On remarquera que la conſtruction de cette Equation montroit la fauſſe racine $\infty b$, qui doit être une des lignes FL ; car puiſque D eſt le centre du Cercle, il coupera l'aſymptote en L, en ſorte que AL ſera égale à AB ; & à cauſe des Hyperboles oppoſées, le rectangle AL, LF doit être égal au rectangle AB, BC ; c'eſt pourquoy la fauſſe racine LF eſt égale à BC qui eſt $\infty b$, il ne reſtera donc plus que l'autre fauſſe racine FL qui doit être égale aux deux vrayes priſes enſemble KG, KG, à cauſe que l'Equation n'a point de ſecond terme.

Si le Cercle BGF touchoit l'Hyperbole CG en un point G, il y auroit dans l'Equation deux racines vrayes égales entr'elles & chacune à la moitié de la fauſſe FL, mais cette Equation pouroit être réduite à une quarrée.

Il y a encore pluſieurs remarques à

faire, mais comme elles dépendent plûtoſt de la nature de l'Equation que de la conſtruction, on les paſſera ſous ſilence.

---

## 2. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée $x^3 * -+aax--aab \propto o$. Ayant pris l'inconnuë $y$ qui avec la connuë $a$ faſſe le rectangle $ay \propto xx$, & mettant cette valeur à la place de $x$ dans l'Equation propoſée, on aura $ayx-+aax--aab \propto o$, qui ſe réduit à

I. Equation. $yx-+ax--ab \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes ; Et multipliant cette Equation par ſa racine $x$, on a $yxx-+axx--abx \propto o$, & à la place du premier $xx$ ſubſtituant ſa valeur $ay$, on a $ayy-+axx--abx \propto o$, qui ſe réduit à

II. $yy-+xx--bx \propto o$, qui eſt un lieu au Cercle. Et dans cette ſeconde Equation, à la place de $xx$ ſubſti-

tuant encore ſa valeur, on aura

III. $yy+ay-bx \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole. Et combinant la ſeconde & la troiſiéme negativement, on a $yy+xx-bx-yy-ay+bx \propto o$, qui ſe réduit à

IV. $xx-ay \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole. Et combinant negativement la troiſiéme & la quatriéme, on a

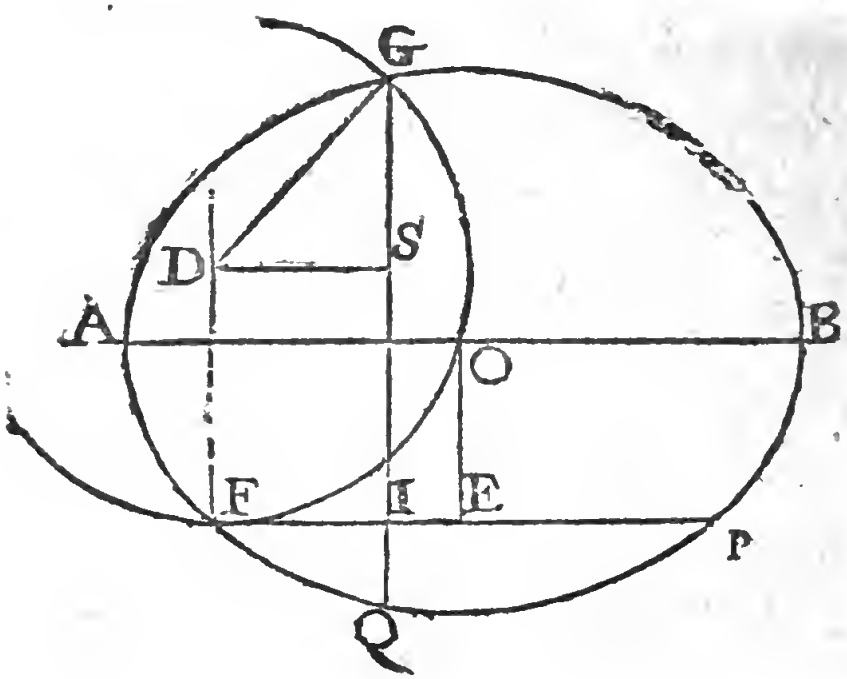
V. $yy+2ay-xx-bx \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole équilatere. Et combinant affirmativement la ſeconde & la quatriéme, on a

VI. $yy-ay+2xx-bx \propto o$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe.

# CONSTRUCTION
## DE L'EQUATION PROPOSE'E AVEC UNE ELLIPSE ET UN CERCLE COMBINEZ ENSEMBLE.

### *En ſe ſervant de la ſixiéme & de la ſeconde Equation.*

Pour la réduction de la ſixiéme Equation $yy - ay + 2xx - bx \propto o$, il faut prendre $v \propto y - \frac{1}{2}a$, ou bien $\propto \frac{1}{2}a - y$, & on aura $vv - \frac{1}{4}aa + 2xx - bx \propto o$, & diviſant par 2 on a $\frac{1}{2}vv - \frac{1}{8}aa + xx - \frac{1}{2}bx \propto o$, & prenant encore $z \propto x - \frac{1}{4}b$, ou bien $\propto \frac{1}{4}b - x$ : on aura l'Equation réduite $\frac{1}{2}vv - \frac{1}{8}aa + zz - \frac{1}{16}bb \propto o$, & multipliant par 2, on a $2zz \propto \frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb - vv$.




Soit l'Ellipſe GAB, dont la ligne AB eſt un axe $\propto 2\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}$, le point O le centre, & la raiſon de cet axe à ſon parametre, ſoit comme 2 à 1 ; ſoit OE perpendiculaire à AB & $\propto \frac{1}{4}b$ ; EF ſoit parallele à OA, & $\propto \frac{1}{2}a$.

Il eſt évident par la conſtruction des lieux, que cette Ellipſe GAB eſt le lieu de cette ſixiéme Equation, que le point F en eſt l'origine, FE les

parties de la tige, & IG perpendiculaire à FE ou OA, eſt un des rameaux.

Pour la combinaiſon de la ſeconde Equation $yy+xx-bx\propto o$, on la réduira en prenant $t\propto x-\frac{1}{2}b$, ou bien $\propto \frac{1}{2}b-x$, & on aura $yy+tt\propto \frac{1}{4}bb$.

C'eſt pourquoy ſi l'on mene FD perpendiculaire à FE & $\propto$ 2OE qui eſt $\propto \frac{1}{2}b$; du point D pour centre, & demi-diametre DF, ſoit décrit le cercle FG. Il eſt évident par la conſtruction des lieux que ce Cercle eſt le lieu de la ſeconde Equation qui eſt combiné avec la ſixiéme.

Et je dis que la ligne GI, menée par le point G de rencontre de l'Ellipſe & du Cercle, & perpendiculaire à FE, eſt la valeur de $x$ de l'Equation propoſée, laquelle GI eſt la ſeule racine réelle & vraye de cette Equation, les deux autres étant imaginaires.

## DEMONSTRATION.

Soit FI $\propto y$, & IG $\propto x$.

A cauſe de l'Ellipſe, le quarré de OA moins le quarré de OH, eſt au quarré de HG comme 2 à 1, ce qui eſt en termes analytiques $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb - \frac{1}{2}ia + ay - yy \mid xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb \parallel 2 \mid 1$, d'où vient l'Equation qui étant réduite, eſt $2xx - bx + yy - ay \propto o$, qui eſt le lieu à l'Ellipſe.

Et à cauſe du Cercle, ayant mené DS parallele à AO, le quarré de DS plus le quarré de SG, ſera égal au quarré de DG ou de DF, ce qui eſt en termes analytiques $yy + xx - bx + \frac{1}{4}bb \propto \frac{1}{4}bb$, ou bien $yy \propto bx - xx$ qui eſt le lieu au Cercle, & dans l'Equation de l'Ellipſe trouvée, ſubſtituant à la place de $yy$ ſa valeur $bx - xx$ trouvée par le lieu au Cercle, on aura $xx \propto ay$, & quarrant chaque partie de cette Equation, on a $x^4 \propto$

$aayy$, & à la place de cet $yy$ ſubſtituant la même valeur $bx - xx$, on aura $x^4 \propto aabx - aaxx$, qui ſe réduit à $x^3 + aax - aab \propto o$, qui eſt l'Equation propoſée qu'il falloit conſtruire.

On doit icy remarquer que le commencement de $y$ qui eſt le point F, eſt ſur la ligne Elliptique, ce que je démontre en cette maniere. Puiſque la ligne OA eſt $\propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb}$, & que EF eſt ſeulement $\propto \frac{1}{2}a$, il eſt évident qu'elle eſt plus petite que OA, & qu'elle peut être une ordonnée à l'axe OE. Suppoſant donc que le point F ſoit ſur l'Ellipſe, il faut trouver la valeur de OE. A cauſe de l'Ellipſe l'axe AB eſt à ſon parametre, comme le quarré de OA moins le quarré de EF au quarré de OE, ce qui eſt en termes analytiques 2 | 1 || $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb - \frac{1}{4}aa$ | au quarré d'une quatriéme proportionnelle, qui ſera le produit des termes moyens diviſé par le premier terme, ce qui eſt

$\propto \frac{1}{16} bb$, OE ſera donc $\propto \frac{1}{4} b$, mais dans la conſtruction du lieu il a eſté poſé $\propto \frac{1}{4} b$, c'eſt pourquoy l'origine du lieu qui eſt le point F, doit être ſur l'Ellipſe.

Le centre D du Cercle doit être auſſi ſur l'Ellipſe, car FD eſt $\propto \frac{1}{2} b$, & OE eſt $\propto \frac{1}{4} b$.

---

## 3. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée

$x^3 * - aax - aab \propto o$.

Suppoſant l'inconnuë $y$, qui avec la connuë $a$ faſſe le rectangle $ay \propto xx$, & mettant cette valeur $ay$ à la place de $xx$ dans l'Equation propoſée, on aura $ayx - aax - aab \propto o$, qui ſe réduit à

I. Equation. $yx - ax - ab \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes. Et multipliant cette Equation par ſa racine $x$, on a $yxx - axx - abx \propto o$, & à la place du pre-

mier $xx$ dans cette Equation, ſubſtituant ſa valeur $ay$, on a $ayy - axx - abx \propto o$, qui ſe réduit à

II. $yy - xx - bx \propto o$, qui eſt un lieu à l'Hyperbole équilatere.

Et dans cette ſeconde Equation, à la place de $xx$, mettant encore ſa valeur, on a

III. $yy - ay - bx \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole.

Et combinant negativement la ſeconde & la troiſiéme Equation, on aura $yy - xx - bx - yy + ay + bx \propto o$, qui ſe réduit à.

IV. $ay - xx \propto o$, qui eſt un lieu à la Parabole.

Et combinant negativement la troiſiéme & la quatriéme, on a $yy - ay - bx - ay + xx \propto o$, qui ſe réduit à

V. $yy - 2ay + xx - bx \propto o$, qui eſt un lieu au Cercle.

Et combinant ces Equations de differentes façons, on en aura une infinité d'autres, dont les conſtruc-

tions ne ſeront pas plus difficiles à faire que celles des Exemples precedens.

## SECONDE PARTIE.

*De la Conſtruction des Equations Cubiques, avec toutes les Sections Coniques données & combinées avec le Cercle; ou bien avec un Cercle donné, & quelle Section Conique on voudra ſemblable à une donnée.*

*Et premierement avec la Parabole & l'Hyperbole équilatere donnée, ou bien avec une Ellipſe & une Hyperbole ſemblable à une donnée & combinée avec le Cercle.*

### 1. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée $x^3 * \ -aax+aab \propto 0$.

Supposant une quantité inconnuë $y$, qui avec l'indéterminée $i$ que l'on poura prendre telle que l'on voudra, fasse le rectangle $iy \propto xx$, & mettant dans l'Equation proposée à la place de $xx$ sa valeur $iy$, on aura

I. Equation. $yx - \frac{aax + aab}{i} \propto o$,

qui est un lieu à une Hyperbole entre ses asymptotes telle que l'on voudra, à cause de la quantité indéterminée $i$, que l'on peut prendre si grande & si petite qu'il est necessaire pour ce sujet. Et multipliant cette Equation par $x$, on a $yxx - \frac{aaxx + aabx}{i} \propto o$, & à la place du premier $xx$ substituant sa valeur, on aura $iyy - \frac{aaxx + aabx}{i} \propto o$, ou bien

II. $yy - \frac{aaxx + aabx}{ii} \propto o$, qui est un lieu à une infinité d'Hyperboles à cause de l'indéterminée. Et dans

cette ſeconde Equation à la place de $xx$ ſubſtituant encore ſa valeur, on aura

III. $yy - \frac{aay}{i} + \frac{aabx}{ii} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra, à cauſe de l'indéterminée $i$; combinant la ſeconde & la troiſiéme affirmativement, on a $yy - \frac{aaxx}{ii} + \frac{aabx}{ii} + yy - \frac{aay}{i} - \frac{aabx}{ii} \propto o$, qui ſe réduit à

IV. $2yy - \frac{aay}{i} - \frac{aaxx}{ii} + \frac{2aabx}{ii} \propto o$, qui eſt un lieu à une infinité d'Hyperboles à cauſe de l'indéterminée. Mais combinant la ſeconde & la troiſiéme negativement, on a $yy - \frac{aaxx}{ii} + \frac{aabx}{ii} - yy + \frac{aay}{i} - \frac{aabx}{ii} \propto o$, qui ſe réduit à

V. $iy - xx \propto o$, qui eſt un lieu à

quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la troiſiéme & la cinquiéme, on aura

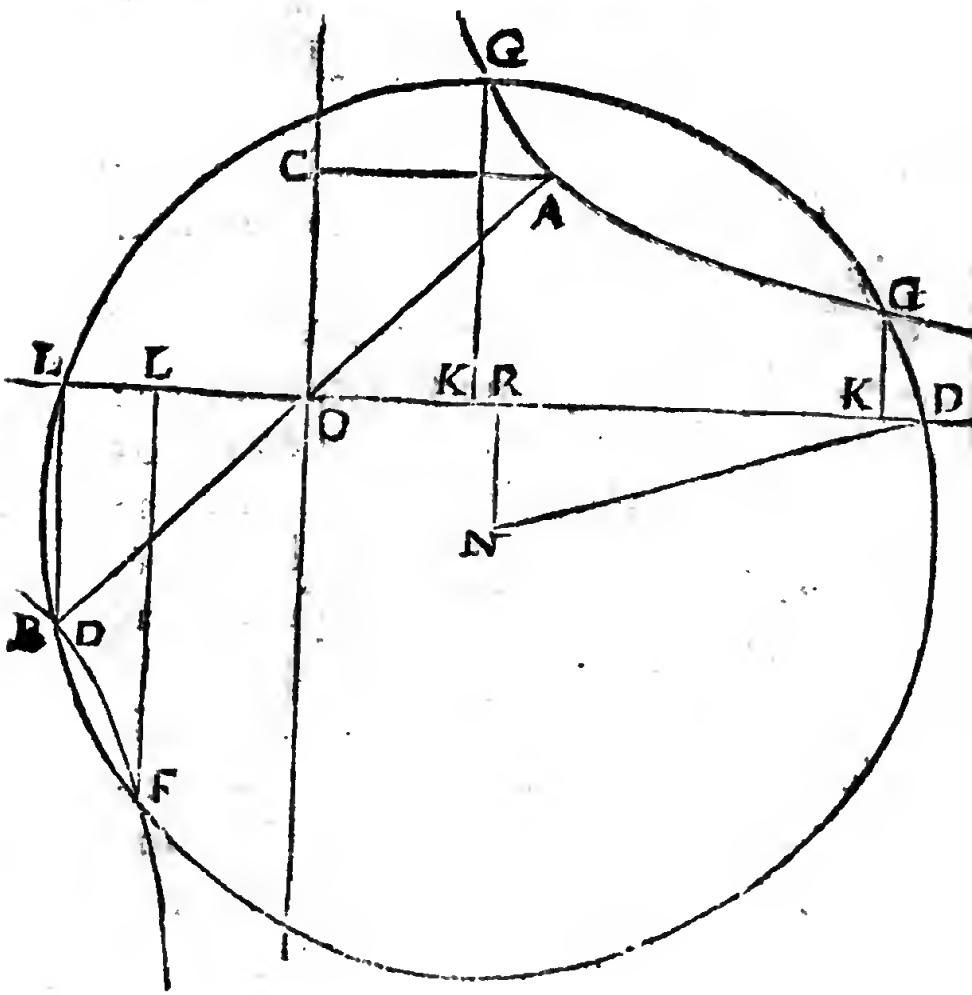
$$\text{VI. } yy - \frac{aay}{i} + \frac{aabx}{ii} - iy + xx \propto 0,$$

qui eſt un lieu à une infinité de Cercles, à cauſe de la quantité indéterminée $i$, mais non pas à quel Cercle on voudra; car dans la réduction de ce lieu au Cercle, la quantité indéterminée $i$ aura trois dimenſions dans la partie qui doit être égale à la moitié du diametre du Cercle donné: c'eſt pourquoy on ne pouroit pas la déterminer ſans y employer une Section Conique, ce qui ne ſerviroit à rien: c'eſt pourquoy cette methode d'introduire la quantité indéterminée $i$, ne peut pas ſervir pour le Cercle donné, & l'on ſe ſervira de celle qui eſt enſuite dans le troiſiéme Exemple.

Suivant les differentes combinaiſons de ces lieux trouvez, on en trouvera une infinité d'autres du même genre.

# CONSTRUCTION
## AVEC UNE HYPERBOLE EQUILATERE DONNE'E ET UN CERCLE COMBINEZ ENSEMBLE.

*En se servant de la premiere & de la sixiéme Equation.*



Soit l'Hyperbole donnée GA, & FB ſon oppoſée, dont l'axe eſt AB, & les aſymptotes OC, OD, qui ſont à angles droits.

Pour la réduction de la premiere Equation $yx - \frac{aax}{i} + \frac{aab}{i} \propto o$, ou bien $\frac{aax}{i} - yx \propto \frac{aab}{i}$, on prendra $v \propto \frac{aa}{i} - y$, & on aura $\frac{aab}{i} \propto vx$.

C'eſt pourquoy de l'extrêmité de l'axe AB, ayant mené AC perpendiculaire à l'aſymptote OC, ſi l'on fait comme le quarré de AC ou de OC qui ſont égales (à cauſe de l'Hyperbole équilatere) à $aa$, ainſi $b$ a une quatriéme proportionnelle, cette quatriéme déterminera la grandeur de $i$; car on aura $\frac{aab}{i} \propto$ au quarré de AC : c'eſt pourquoy cette Equation à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, eſt à l'Hyperbole donnée par cette

détermination de $i$.

Pour la réduction de la ſixiéme Equation $yy - \frac{aa}{i}y - iy + xx + \frac{aabx}{ii} \propto o$, qui eſt un lieu à une infinité de Cercles. Ayant pris $z \propto y - \frac{\frac{1}{2}aa}{i} - \frac{1}{2}i$ ou bien $\propto \frac{\frac{1}{2}aa}{i} + \frac{1}{2}i - y$, & $t \propto x + \frac{\frac{1}{2}aab}{ii}$, on aura l'Equation réduite $zz + tt \propto \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ii + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4}$.

La réduction de la premiere Equation nous fait voir que ſi l'on prend $OD \propto \frac{aa}{i}$, le point D ſera l'origine du lieu, la ligne DO la tige, dont les parties DK ſeront $\propto y$, & les rameaux KG $\propto x$. Et la réduction du Cercle montre qu'il faut prendre $DR \propto \frac{\frac{1}{2}aa}{i} + \frac{1}{2}i$, & ayant mené RN

perpendiculaire à DO, & l'ayant faite $\propto \frac{\frac{1}{2}aab}{ii}$, par les regles de la construction des lieux, le point N doit être le centre du Cercle GF, dont le demi-diametre doit être ND.

Je dis que si le Cercle GF rencontre chacune des Hyperboles données en deux points GG, FF, les perpendiculaires GK, GK, menées des points de rencontre à l'asymptote OD, sont les vrayes racines de l'Equation proposée $\propto x$, & que les perpendiculaires FL, FL sont les fausses racines; & si le Cercle touche l'Hyperbole GA en un point, il y aura dans l'Equation deux vrayes racines égales entr'elles, & alors elle poura être déprimée à une quarrée qui contiendra encore une des racines égales, & si il touche l'Hyperbole FB, il y en aura deux fausses.

## DEMONSTRATION.

DK ſoit $\propto y$, & KG $\propto x$. A cauſe des aſymptotes, le rectangle OK, KG, eſt égal au rectangle OC, CA, ou au quarré de OC, ou AC, ce qui eſt en termes analytiques $\frac{aax}{i} - yx \propto \frac{aab}{i}$, ou bien $y \propto \frac{aax - aab}{ix}$.

Et à cauſe du Cercle, le quarré de GK & de RN comme d'une ſeule ligne, avec le quarré de RK, eſt égal au quarré de ND, ou NG, ce qui eſt auſſi en termes analytiques $xx + \frac{aabx}{ii} + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4} + yy - \frac{aay}{i} \cdot iy + \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ii \propto \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ii + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4}$, qui ſe réduit à $xx + \frac{aabx}{ii} + yy - \frac{aay}{i} - iy \propto o$, & dans cette Equa-

tion à la place de $y$ mettant ſa valeur $\frac{aax-aab}{ix}$ trouvée par le moyen de l'autre, & celle de ſon quarré à la place de $yy$, on aura une Equation qui étant réduite ſera $x^4+\frac{aabx^3}{ii}-aaxx+aabx-\frac{a^4bx}{ii}+\frac{a^4bb}{ii}\propto o$, laquelle Equation peut être diviſée par le Binome $x+\frac{aab}{ii}$, qui contient une des fauſſes racines, & le quotient ſera $x^3{}_*-aax+aab\propto o$, qui eſt l'Equation propoſée qu'il falloit conſtruire.

## *Remarques.*

Le Cercle DGF coupera toûjours l'aſymptote OL en quelque point L, de quelle grandeur que ſoient les quantitez connuës de l'Equation, en ſorte que OL ſera égale à l'indéter-

minée $i$, que l'on a introduite dans l'Equation : car OD eſt $\propto \frac{aa}{i}$, & DR $\propto \frac{\frac{1}{2}aa}{i} + \frac{1}{2}i$, & le centre du Cercle étant en N, RL & RD ſeront égales ; mais RO eſt toûjours plus petite que RD ; c'eſt pourquoy les points de rencontre du Cercle & de l'Aſymptote OD, ſont des deux côtez du centre O, & RO ſera $\propto \frac{\frac{1}{2}aa}{i} - \frac{1}{2}i$, ſi l'on ôte donc RO de RL, il reſtera OL $\propto i$, qui eſt la quantité indéterminée que l'on a introduite dans l'Equation.

Si du point de rencontre L du Cercle & de l'aſymptote, on mene LP juſques à l'Hyperbole en P. Je dis que LP eſt double de RN, & par conſequent que le Cercle paſſe auſſi en P.

A cauſe des aſymptotes le rectangle OL, LP eſt égal au quarré de CA

CA, qui eſt $\propto \frac{aab}{i}$, mais OL eſt $\propto i$, c'eſt pourquoy LF ſera $\propto \frac{aab}{ii}$, qui eſt double de RN que l'on a poſée $\propto \frac{\frac{1}{2}aab}{ii}$, qui eſt auſſi la fauſſe racine de l'Equation trouvée par la combinaiſon des deux lieux, & qui a ſervi pour en faire la diviſion; d'où il eſt évident que le Cercle rencontrera toûjours l'Hyperbole FB en deux points F, ou tout au moins en un ſeul point, ſi le Cercle la touche: car on connoît par les ſignes de cette Equat. qu'elle doit avoir neceſſairement deux vrayes racines, & puis qu'elle n'a point de ſecond terme, que ces deux vrayes racines enſemble doivent être égales à la fauſſe; & qu'il y en doit avoir deux fauſſes, puiſque l'une doit ſervir à déprimer l'Equation trouvée par la combinaiſon des deux lieux.

Si le Cercle coupe donc l'Hyper-

bole FB en deux points, l'une des deux fausses racines sera égale au double de RN, & l'autre égale aux deux vrayes jointes ensemble, & chacune sera égale au double de RN; mais si ce Cercle la touche en un point F, les deux fausses racines seront jointes ensemble, & chacune sera égale au double de RN; mais dans ce cas, l'Equation proposée est plane & non pas cubique, car on la pouroit diviser par un Binome qui contiendroit une de ses racines qui est connuë.

---

2. EXEMPLE.

Soit une Equation proposée

$x^3 * +aax-aab \propto o$.

Supposant, comme dans l'Exemple precedent, $iy \propto xx$, & mettant dans l'Equation proposée à la place de $xx$ sa valeur $iy$, on aura

I. Equation. $yx+\frac{aax-aab}{i} \propto o$,

qui est un lieu à telle Hyperbole que l'on voudra entre ses asymptotes, à cause de l'indéterminée $i$. Et multi-

pliant cette Equation par ſa racine $x$, on aura $yxx + \frac{aaxx}{i} - \frac{aabx}{i} \propto o$, & à la place du premier $xx$ ſubſtituant ſa valeur, on aura $iyy + \frac{aaxx}{i} - \frac{aabx}{i} \propto o$, qui ſe réduit à

II. $yy + \frac{aaxx - aabx}{ii} \propto o$, qui eſt un lieu à une infinité d'Ellipſes. Et dans cette ſeconde Equation à la place de $xx$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

III. $yy + \frac{aay}{i} - \frac{aabx}{ii} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant la ſeconde & la troiſiéme negativement, on a

IV. $iy - xx \propto o$, qui eſt encore un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la troiſiéme & la quatriéme, on a

V. $yy + \frac{aay}{i} - \frac{aabx}{ii} - iy + xx \propto o$,

qui eſt un lieu à une infinité de Cercles. Et combinant negativement la ſeconde avec le double de la troiſiéme, on a

VI. $\frac{aaxx}{ii} + \frac{aabx}{ii} - yy - \frac{2aay}{i} \propto o$,

qui eſt un lieu à une infinité d'Hyperboles.

On voit clairement dans l'Exemple precedent & dans celuy-cy, que les lieux trouvez à l'Ellipſe & à l'Hyperbole, peuvent être à une Ellipſe & à une Hyperbole ſemblable à une donnée : car cette ſimilitude dépend de la raiſon du diametre au parametre; & dans les lieux trouvez, l'indéterminée *i* ſe trouve dans les quantitez qui déterminent cette raiſon. C'eſt pourquoy s'il faut faire la conſtruction de l'Equation propoſée avec une Ellipſe ou une Hyperbole ſemblable à une donnée, la valeur de *i* étant trouvée par la raiſon du diametre au parametre de la ſection donnée, on poura combiner leurs lieux avec celuy

du Cercle, dans lequel on ſubſtituera la valeur de *i*; ce qui eſt ſi facile qu'on ne doit pas s'arrêter icy à en faire une plus longue explication, non plus que la conſtruction.

## CONSTRUCTION

*D'une Equation Cubique avec une Ellipſe ou une Hyperbole donnée, combinée avec le Cercle; ou avec un Cercle donné, & telle Section Conique que l'on voudra ſemblable à une donnée.*

---

### 3. EXEMPLE.

On trouvera dans cet Exemple une Methode differente de la precedente, pour introduire dans les Equations une quantité indéterminée, en ſorte que le lieu puiſſe être à quel Cercle on voudra, & en ſuite celle d'y en in-

troduire deux, afin qu'il ſoit à une Ellipſe ou à une Hyperbole donnée.

Soit l'Equation propoſée

$x^3 * - aax + aab \propto o$.

Ayant multiplié cette Equation par ſa racine, on a $x^4 * - aaxx + aabx \propto o$. Et ſi l'on prend l'inconnuë $v$, qui étant multipliée par la connuë $a$, & le produit diviſé par l'indéterminée $i$, ſoit égal à $x$ on a $\frac{av}{i} \propto x$, ce qui étant ſubſtitué par toute l'Equation à la place de $x$, on aura $\frac{a^4v^4}{i^4} - \frac{a^4vv}{ii} + \frac{a^3bv}{i} \propto o$, ou bien réduiſant

I. Equation. $\frac{av^4}{i^3} - \frac{avv}{i} + bv \propto o$.

Maintenant, ſi l'on prend l'inconnuë $y$, dont le rectangle avec la même indéterminée $i$ ſoit égal à $vv$, on a $iy \propto vv$, & ſubſtituant dans le premier terme à la place de $vv$ ſa valeur, on a $\frac{aiiyy}{i^3} - \frac{avv}{i} + bv \propto o$, qui ſe ré-

duit à

II. $yy - vv + \frac{ibv}{a} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Hyperbole équilatere on voudra ; & dans cette Equation à la place de $vv$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

III. $yy - iy + \frac{ibv}{a} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la ſeconde & la troiſiéme, on a

$yy - yy + iy - vv + \frac{ibv}{a} - \frac{ibv}{a} \propto o$, qui ſe réduit à

IV. $iy - vv \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la troiſiéme & la quatriéme, on a $yy - iy + \frac{ibv}{a} - iy + vv \propto o$, qui ſe réduit à

V. $yy + vv - 2iy + \frac{ibv}{a} \propto o$, qui eſt

dans l'Equation propoſée, on aura

VII. $\frac{kiy}{a} - \frac{kvv}{a} \propto o$. Et combinant affirmativement la ſeconde & la 7^e, on a $yy - vv + \frac{ibv}{a} + \frac{kiy}{a} - \frac{kvv}{a} \propto o$, ou bien

VIII. $\frac{kvv + ivv}{a} - \frac{ibv}{a} - yy - \frac{kiy}{a} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Hyperbole on voudra, à cauſe des deux quantitez indéterminées $k$ & $i$, qui ont dans ce lieu les conditions requiſes par la Methode. Et combinant negativement la troiſiéme & la ſeptiéme, on a

IX. $yy - iy + \frac{ibv}{a} - \frac{kiy}{a} + \frac{kvv}{a} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Ellipſe on voudra, pour les mêmes raiſons que l'Hyperbole.

Et ſuivant les regles des combinaiſons, on peut avoir une infinité d'autres Equations à ces mêmes lieux,

qui ſe rencontreront plus ou moins ſimples, ſuivant la varieté des ſignes dans les Exemples propoſez.

---

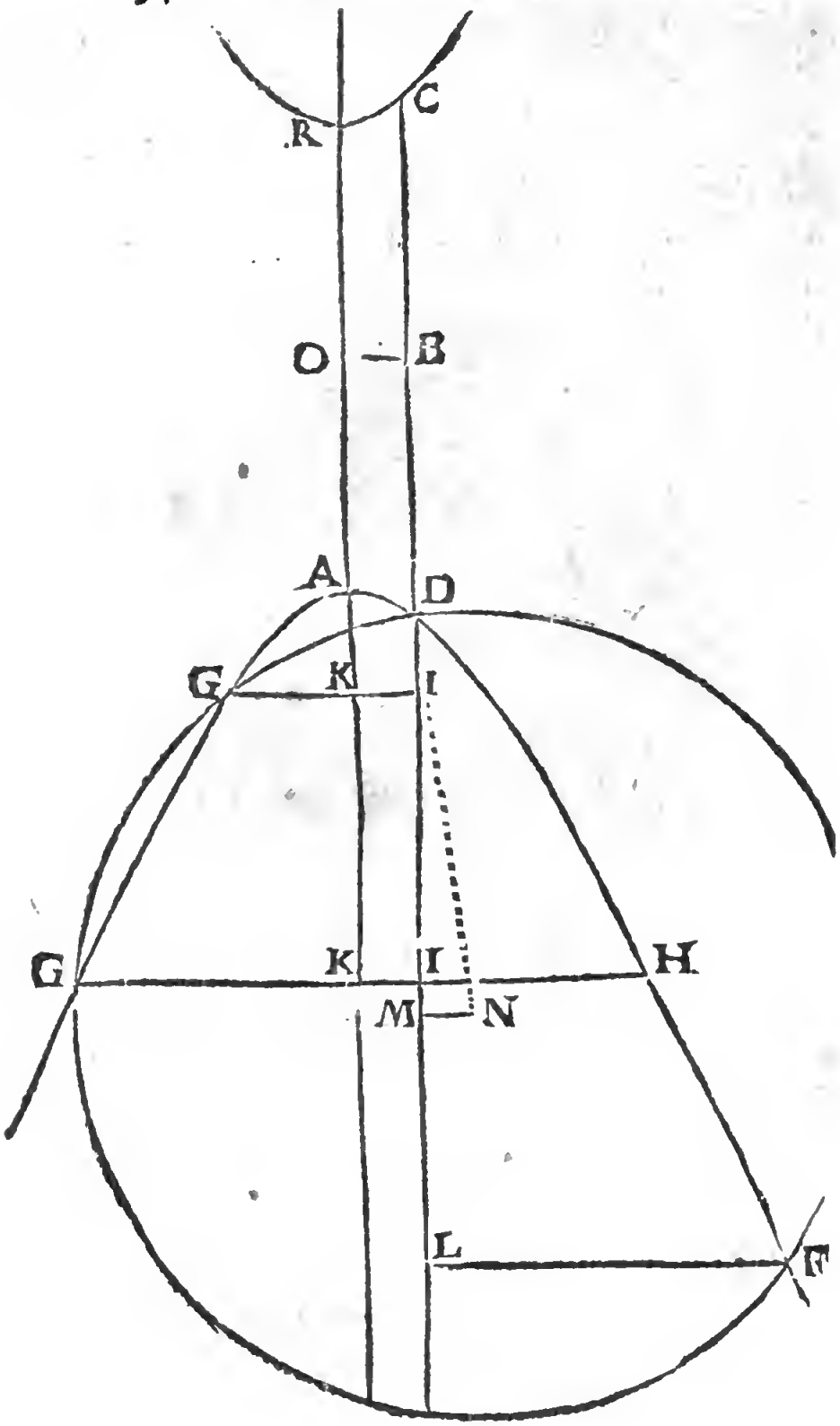
## CONSTRUCTION
### AVEC UNE HYPERBOLE DONNE'E ET UN CERCLE.

*En ſe ſervant de la huitiéme & de la cinquiéme Equation.*

La huitiéme Equation étant $\frac{kvv+avv}{a} - \frac{ibv}{a} \propto yy + \frac{kiy}{a}$, pour ſa réduction on prendra $r \propto v - \frac{\frac{1}{2}ib}{k+a}$ ou bien $\frac{\frac{1}{2}ib}{k+a} - v \propto r$, & $ſ \propto y + \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$ & on la réduira à

*Equation réduite* $\left| \frac{krr+rra}{a} \propto ſſ + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}kkii}{aa} \right.$. Il ſeroit facile par cette ré-

duction de conſtruire l'Hyperbole ſi elle n'étoit pas donnée : mais à cauſe qu'elle l'eſt, il faut déterminer les quantitez indéterminées *i* & *k*, afin que ce lieu ſoit à l'Hyperbole donnée.


C
R
O
B
A
D
G
K
I
G
K
I
H
M
N
L
F

Soit donc l'Hyperbole donnée AG, dont l'axe soit AR ∞ $d$, & son parametre ∞ $p$, le point O son centre, & l'origine du lieu qui luy est réduit, & les parties de son axe OK, soient les parties de la tige ∞ $e$, & ses ordonnées KG, les rameaux ∞ $æ$, on aura donc à cause de l'Hyperbole donnée, l'Equation suivante.

*Equation à l'Hyperbole donnée.* $\frac{dææ}{p} \infty ee - \frac{1}{4}dd$, & il faut que l'Equation réduite soit la même que celle cy pour faire la construction requise, & chaque terme connu de l'une doit être égal à chaque terme connu de l'autre, & les inconnuës viendront les mêmes dans l'une & dans l'autre; ce qui est possible, puisque les quantitez $i$ & $k$ ne sont pas déterminées dans le lieu réduit, & qu'elles y sont distribuées comme il a esté expliqué dans la Methode.

On voit que les termes qui se répondent sont dans l'Equation ré-

duite $\frac{krr+arr}{a}$, dans celle à l'Hyperbole donnée $\frac{d\text{œ}\text{œ}}{d}$; c'eſt pourquoy il faut que $a$ ſoit à $k+a$ comme $p$ à $d$, afin que l'axe de l'Hyperbole du lieu réduit ait même raiſon à ſon parametre, que celuy de l'Hyperbole donnée au ſien, qui eſt la premiere condition requiſe. On tirera donc de cette proportion l'Equation ſuivante $ad \propto kp+ap$, ou bien $\frac{ad}{p} - a \propto k$, qui détermine la valeur de $k$ qui étoit auparavant indéterminée.

On remarquera, comme il eſt évident par cette Equation qui détermine $k$, que ſi l'axe de la Section Conique donnée, c'eſt à dire de l'Hyperbole ou de l'Ellipſe dont il s'agit icy, eſt plus grand que ſon parametre, la quantité $k$ ſera affirmative, s'il luy eſt égal elle ſera nulle, & enfin s'il eſt plus petit elle ſera negative,

& elle doit être precedée du ſigne moins.

Si elle étoit nulle, il eſt évident que l'Hyperbole donnée ſeroit équilatere, & l'Ellipſe ſeroit un Cercle.

Mais ſi elle eſt negative, & ſi l'on veut laiſſer dans les termes de l'Equation ce caractere $k$, au lieu d'y ſubſtituer ſa valeur, pour abreger le calcul, il faudra dans tous les termes de l'Equation où cette quantité ſe rencontre en nombre impair, changer le ſigne qui le precede, car lorſque l'on a pris cette quantité indéterminée $k$, on l'a ſuppoſée affirmative, & il ſe trouve par la détermination qu'elle eſt negative, ce changement ſe doit faire ainſi, dautant que $-$ par $-$ fait $+$ auſſi bien que $+$ par $+$.

Si dans l'Equation réduite, la raiſon du diametre à ſon parametre au lieu d'être comme $k+a \mid a$, eut eſté ſimplement comme $k \mid a$, ce changement ne ſe feroit pas ; car $k$

ne pouroit être qu'affirmative, comme il ſeroit arrivé ſi l'on avoit combiné la ſeptiéme & la troiſiéme Equation, pour en faire la huitiéme, au lieu de la ſeptiéme & de la ſeconde, dont on ſe ſert dans cette conſtruction.

Ayant donc mis dans le premier terme de l'Equation réduite à la place de $k$ ſa valeur trouvée $\frac{ad}{p} - a$, & ſi dans les autres termes de l'Equation, où elle ſe rencontre, on ne met pas cette même valeur pour abreger le calcul, & ſuppoſant qu'elle eſt affirmative, on aura l'Equation preparée.

*Equation preparée.* $\frac{drr}{p} \propto ff + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka + aa} - \frac{\frac{1}{4}kkii}{aa}$,

qui ſera un lieu à une infinité d'Hyperboles ſemblables entr'elles, à cauſe de la quantité indéterminée $i$; que l'on poura prendre telle que l'on voudra, & qui changera ſeulement

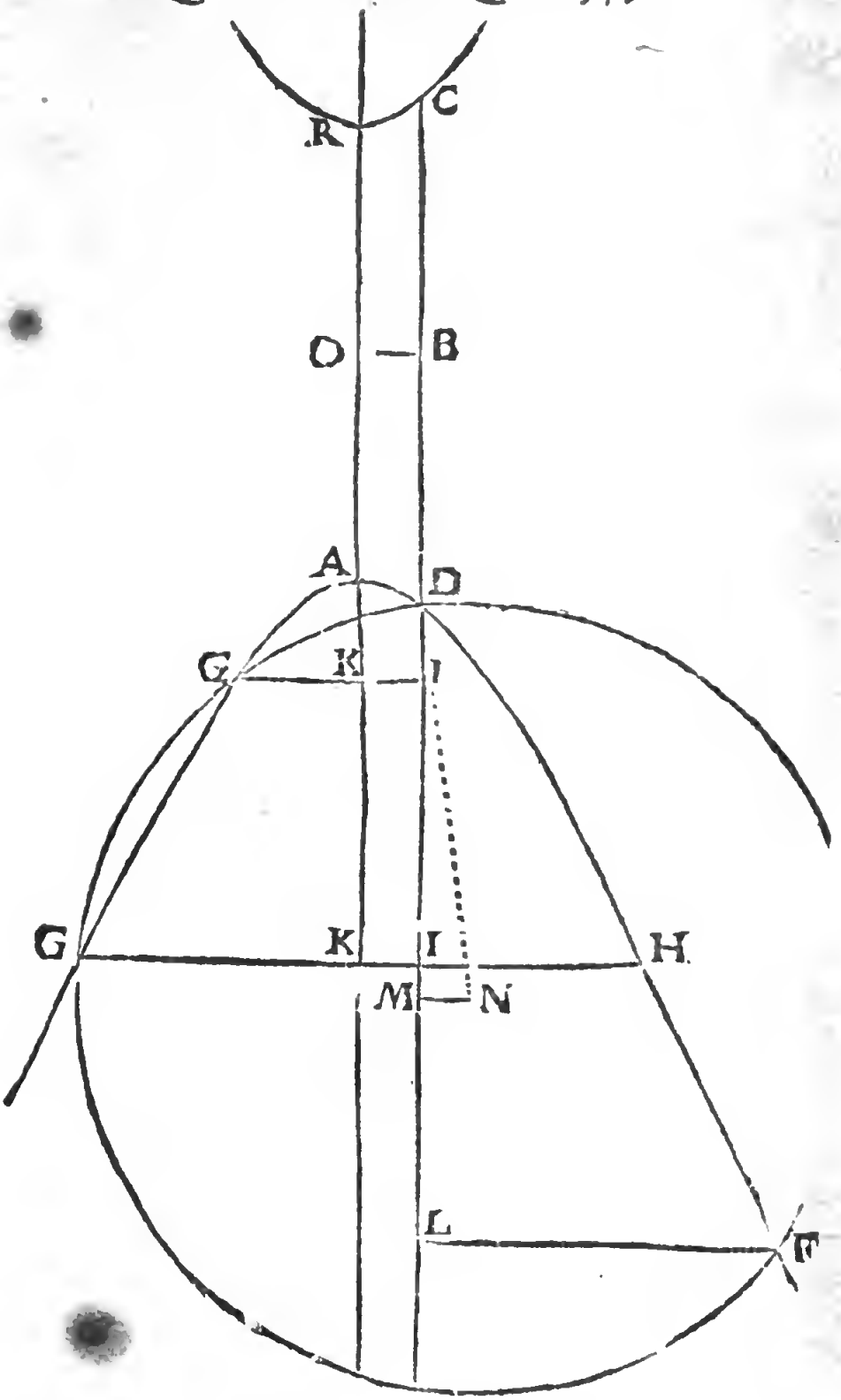
la grandeur du diametre : mais afin qu'elle ſoit à l'Hyperbole donnée, il faut que ſon terme connû $\frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa}$ $-\frac{\frac{1}{4}iikk}{aa}$, ſoit égal, & ait le ſigne — comme le terme qui luy répond dans l'Equation à l'Hyperbole donnée qui eſt $-\frac{1}{4}dd$, ce qui fait que l'on a l'Equation $\frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} \propto -\frac{1}{4}dd$, ou bien $ii \propto \frac{ddkaa+dda^3}{k^3+kka-bba}$ ce qui détermine la valeur de $i$.

Mais ſi la quantité connuë $+\frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa}$ de l'Equation réduite, aprés que l'on a déterminé $k$, étoit affirmative, il faudroit dans l'Equation réduite tranſpoſer ce terme dans la premiere partie, puis diviſer & multiplier toute l'Equation, afin que $rr$ fût ſans fraction, comme

il eſt enſeigné dans la Conſtruction des Lieux, & aprés chercher comme cy-devant la valeur de $k$, & en ſuite celle de $i$, qui eſt neceſſaire pour la conſtruction du Cercle avec l'Hyperbole donnée : ce changement n'arrive point à l'Ellipſe, comme on l'a pû voir dans la même Conſtruction des Lieux.

Mais ſuppoſons que cette quantité ſoit negative afin de ne point faire de changement, ce qui n'apporteroit aucun éclairciſſement dans ces Exemples.

Du centre O de l'Hyperbole donnée AG, ayant mené OB perpendiculaire à l'axe, & $\propto \frac{\frac{1}{2}bi}{k+a}$, & ayant tiré BD parallele à l'axe & $\propto \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$, le point D ſera l'origine du lieu requis de l'Hyperbole donnée, la même ligne BD prolongée vers I, ſera la


R
C
O
B
A
D
G
K
I
G
K
I
H
M
N
L
F

tige, & DI en ſeront les parties $\propto y$, & ſes rameaux ſeront les perpendiculaires GI $\propto v$.

La cinquiéme Equation $yy + vv - 2iy + \frac{ibv}{a} \propto o$, eſt un lieu à quel Cercle on voudra lorſque $i$ n'eſt pas déterminée, mais l'ayant eſté par l'Hyperbole donnée, ce Cercle l'eſt auſſi : c'eſt pourquoy pour le conſtruire il en faut faire la réduction en prenant l'inconnuë $z \propto y - i$, ou bien $\propto i - y$, & l'inconnuë $t \propto v + \frac{\frac{1}{2}ib}{a}$ & elle ſe réduira à $zz + tt \propto ii + \frac{\frac{3}{4}iibb}{aa}$.

Si l'on prend DM $\propto i$, & ayant mené MN perpendiculaire à DM, & $\propto \frac{\frac{1}{2}ib}{a}$ : du point N pour centre & demi-diametre $\propto \sqrt{ii + \frac{\frac{1}{4}iibb}{aa}}$, ce qui eſt égal à ND, ſoit décrit le Cercle DGF.

Il eſt évident par la Conſtruction des Lieux, que les lignes MI ſont $\propto z$, & que GI plus MN ſont $\propto t$, enfin que ce Cercle eſt le lieu de la cinquiéme Equation.

Je dis que les lignes GI, FL menées des points de rencontre du Cercle avec l'Hyperbole, & perpendiculaires ſur BI, ſont les racines de l'Equation propoſée, c'eſt à dire les valeurs de $v$ & de $x$, ſi on les change dans la raiſon de $i$ à $a$, comme on a fait au commencement, où l'on a poſé $\frac{av}{i} \propto x$, GI ſeront les vrayes & FL la fauſſe, & l'Equation propoſée ayant deux vrayes racines & une fauſſe, ſi les deux vrayes ſont réelles, elles ſeront enſemble égales à la fauſſe, à cauſe que l'Equation n'a point de ſecond terme.

## DEMONSTRATION.

Soit DI $\propto y$, & IG $\propto v$. A cauſe de l'Hyperbole donnée, le quarré de OK, ou de BI moins le quarré de OA, eſt au quarré de KG, comme l'axe RA à ſon parametre, ce qui eſt en termes analytiques $\frac{\frac{1}{4}kkii}{aa} + \frac{kiy}{a} + yy + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka + aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} \mid vv - \frac{biv}{k+a} + \frac{\frac{1}{4}bbii}{kk+2ka+aa} \parallel d \mid p$, ou bien ce qui eſt la même choſe $\parallel k + a \mid a$: d'où vient l'Equation $kvv + avv - biv \propto kiy + yya$: qui eſt le lieu à l'Hyperbole.

Maintenant à cauſe du Cercle, le quarré de NG, ou ND eſt égal aux deux quarrez enſemble de MI, & de GI plus MN comme d'une ſeule ligne, ce qui eſt $ii + \frac{\frac{1}{4}iibb}{aa} \propto yy - 2iy$

$+ii+vv+\frac{ibv}{a}+\frac{\frac{1}{4}iibb}{aa}$, qui se réduit à $yya-2iya+vva+ibv \propto o$, qui est le lieu au Cercle, & si l'on combine affirmativement ces deux Equations trouvées à l'Hyperbole & au Cercle, on aura $kvv+avv-biv-ky-ayy+ayy-2aiy+avv+ibv \propto o$, qui se réduit à $kvv+2avv-kiy-2aiy \propto o$, qui étant divisée par $k+2a$, se réduit encore à $vv-iy \propto o$, ou bien à $\frac{vv}{i} \propto y$, & mettant cette valeur de $y$ dans l'une des deux Equations trouvées, par exemple dans celle de l'Hyperbole, on aura $kvv+avv-biv \propto kvv+\frac{av^4}{ii}$, qui se réduit à $v^3-vii+\frac{bi^3}{a} \propto o$ : Mais à cause que dans le commencement de l'operation on a fait $v \propto \frac{xi}{a}$, si l'on resti-

tuë la valeur de $v$ dans cette Equation, on aura $\frac{x^3 i^3}{a^3} - \frac{x i^3}{a} + \frac{b i^3}{a} \propto 0$, qui ſe réduit à $x^3 - aix + aab \propto 0$, qui eſt l'Equation propoſée qu'il falloit conſtruire.

On remarquera ſeulement, que le commencement de $y$ qui eſt l'origine du lieu requis, & le point D dans cet exemple eſt toûjours ſur la Section Conique, quoy qu'elle ſoit donnée, comme on l'a remarqué dans le ſecond Exemple de la Premiere Partie de ce Chapitre, lorſque la Section eſt priſe à volonté. Il en eſt de même lorſque le Cercle eſt donné : mais lorſqu'on ſe ſert du lieu aux aſymptotes, elle eſt toûjours ſur les aſymptotes ; & pour en faire la démonſtration dans ce lieu,

Il eſt évident premierement que BD eſt toûjours plus grande que OA ; car le quarré de BD qui eſt $\frac{1}{4} - \frac{iikk}{aa}$, eſt

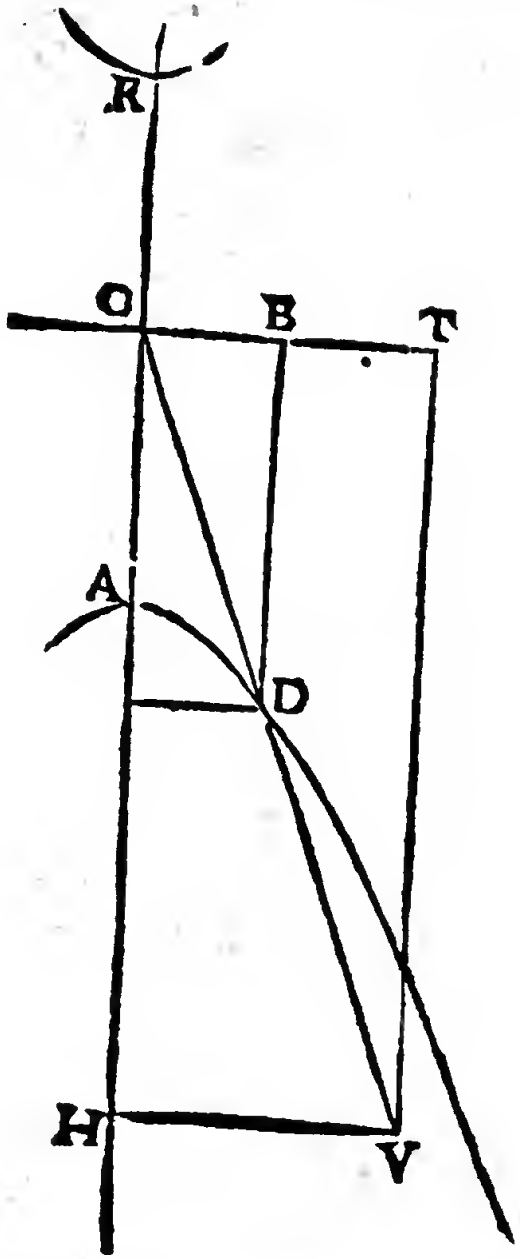
plus

plus grand que le quarré de OA, qui eſt $\frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} - \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa}$. Et ſi l'on cherche la raiſon du quarré de BD moins le quarré de OA, au quarré de OB, ce qui eſt $\frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} \mid \frac{\frac{1}{4}iibb}{kk+2ka+aa}$, on trouvera qu'elle eſt comme $kk+2ka+aa \mid ka+aa$, ou bien comme $k+a \mid a$, mais $k+a$ eſt à $a$, comme le diametre ou l'axe RA à ſon parametre, c'eſt pourquoy le point D eſt ſur l'Hyperbole donnée.

Il n'eſt pas neceſſaire de déterminer la valeur de $i$ pour trouver le point D, car au contraire on la peut trouver ſans ſe ſervir d'autre choſe que de la détermination de la quantité $k$, qui ſe trouve par la raiſon du diametre au parametre de la Section donnée, & par ce moyen en déterminer la grandeur pour la conſtruc-

tion du Cercle.

Puiſque OB eſt $\propto \frac{\frac{1}{2}bi}{k+a}$, & BD $\propto \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$, OB ſera à BD en termes analytiques $\| \frac{\frac{1}{2}bi}{k+a} \mid \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$, ou bien $\| ba \mid kk+ka$; mais on a trouvé que la valeur de $k$ étoit $\frac{ad}{p}-a$ : mettant donc cette valeur à la place de $k$, on aura $\| ba \mid \frac{aadd}{pp}-\frac{2aad}{p}+aa+\frac{aad}{p}-aa$, qui ſe réduit à $\| ppb \mid add-adp$.




Si l'on fait donc un rectangle OV de quelle grandeur on voudra, dont

un des angles ſoit au centre O de l'Hyperbole donnée, & ſes côtez ſur les axes, & que la raiſon du côté OT au côté TV ſoit $\| ppb \mid add - adp$; il eſt évident que la diagonale OV de ce rectangle, prolongée s'il eſt neceſſaire, coupera l'Hyperbole au point D requis, & ce point D ayant eſté trouvé, on aura les grandeurs de OB & de BD, & par conſequent la valeur de $i$ indéterminée, qui doit ſervir pour la conſtruction du Cercle.

Car puiſque BD doit être $\propto \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$, ſi l'on fait comme $\frac{1}{2}k$ eſt à $a$, qu'ainſi DB ſoit à une autre, cette quatriéme proportionelle ſera la valeur de $i$ cherchée.

On doit remarquer que dans l'Hyperbole, ſi la ligne diagonale OV ne la rencontre pas, elle ne ſera pas dans l'angle des aſymptotes qui contient l'Hyperbole, il faut tranſpoſer l'Equation, car la quantité qui doit avoir le ſigne —, & qui doit

être égale à la moitié de l'axe, auroit le ſigne + ; & ſi cette ligne OV étoit jointe à l'aſymptote, le lieu donné ne ſeroit que l'angle compris par les aſymptotes, qui eſt la derniere de toutes les Hyperboles ſemblables entr'elles. Le point D ſe peut rencontrer dans l'Hyperbole oppoſée, ſuivant la diverſité des ſignes dont les termes de l'Equation ſont affectez.

On voit auſſi manifeſtement que la conſtruction avec une Ellipſe donnée, n'eſt pas plus compoſée que celle avec l'Hyperbole.

La conſtruction avec un Cercle donné & une Section Conique ſemblable à une donnée, ſera facile à faire en ſe ſervant de la cinquiéme Equation qui déterminera la valeur de $i$ ; c'eſt pourquoy pour l'Ellipſe ou pour l'Hyperbole non équilatere, combinant cette cinquiéme Equation avec la neufiéme ou la huitiéme, la quantité qui détermine la grandeur de l'axe ſera déterminée ; mais celle

qui donne la raiſon de l'axe à ſon parametre, & qui eſt celle qui fait les Ellipſes ou les Hyperboles ſemblables, poura être ſuppoſée de quelle grandeur on voudra. Pour ce qui eſt des Paraboles, & des Hyperboles équilateres, la troiſiéme ou la quatriéme, & la ſeconde ou la ſixiéme, pouront y ſervir, puiſque ces lignes courbes ſont toutes ſemblables entr'elles.

## CHAPITRE III.

### DE LA CONSTRUCTION DES EQUATIONS QUARRE'-QUARRE'ES.

PUiſque les Equations du Chapitre precedent ont eſté faites quarré-quarrées, en les multipliant par leur racine pour en tirer les lieux qui peuvent ſervir à leur conſtruction; il n'eſt pas à propos de rapporter icy des Exemples de la premiere Partie, qui eſt la conſtruction avec toutes les Sections Coniques priſes à volonté, puiſqu'il n'y a autre difference entr'elles, que la quantité du dernier terme qui eſt dans celles-cy entierement connuë, & que l'on n'y trouve pas le lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, ce qui n'apporte aucun changement aux lieux. On ſe contentera donc de donner quelques Exemples de la conſtruction de ces

Equations avec les Sections Coniques données & combinées avec le Cercle, ou avec le Cercle donné & quelle Section Conique on voudra ſemblable à une donnée, pour avoir lieu de faire quelque remarque ſur ces ſortes d'Equations.

---

## CONSTRUCTION

### DES EQUATIONS QUARRE'-QUARRE'ES.

*Avec les Sections Coniques données, & premierement avec une Parabole ou une Hyperbole équilatere donnée, combinée avec le Cercle; & avec une Ellipſe ou une Hyperbole ſemblable à une donnée combinée avec le Cercle.*

#### 1. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée
$x^4 \ast + 1axx - aabx - aabc \propto 0$.

Ayant pris l'inconnuë $y$, qui avec l'indéterminée $i$ faſſe un rectangle $iy \propto xx$, comme on a fait dans les Equations Cubiques; ſi dans le premier terme de l'Equation à la place de $x^4$, on met ſa valeur, on aura $iiyy + aaxx - aabx - aabc \propto o$, ou bien

I. Equation. $\frac{aaxx}{ii} - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} + yy \propto o$, qui eſt un lieu à une infinité d'Ellipſes. Et dans cette Equation à la place de $xx$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

II. $\frac{aaiy}{ii} - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} + yy \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la premiere & la ſeconde, on a $\frac{aaxx}{ii} - \frac{aaiy}{ii} \propto o$, qui ſe réduit à

III. $xx - iy \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant affirmativement la ſeconde &

la troiſiéme, on a

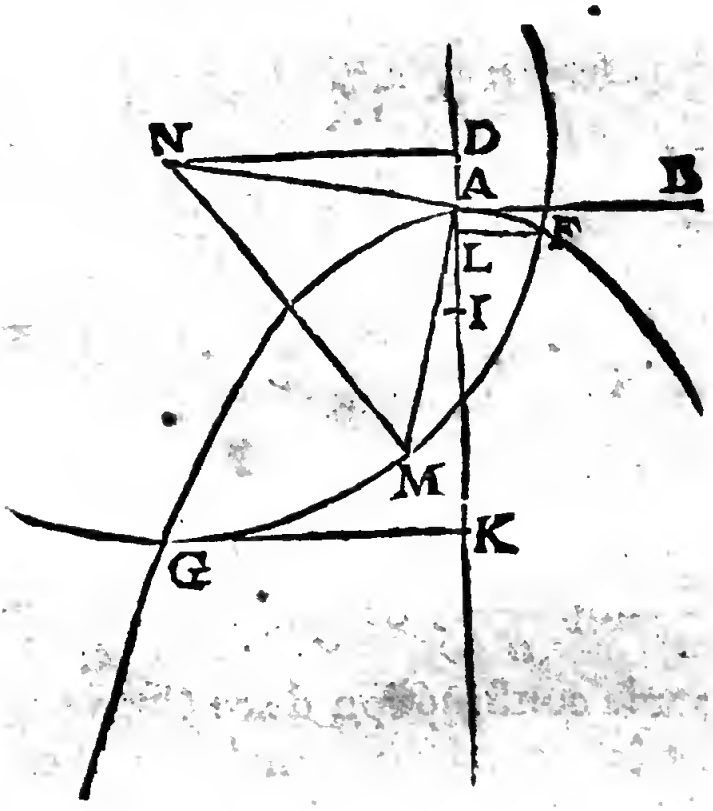
IV. $\frac{aay}{i} - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} + yy + xx -$
$iy \propto o$, qui eſt un lieu à une infinité de Cercles.

Et ſuivant les diverſes combinaiſons de ces lieux, on trouvera une infinité d'Equations aux Sections Coniques.

# CONSTRUCTION

## AVEC UNE PARABOLE DONNE'E COMBINE'E AVEC LE CERCLE.

*En ſe ſervant de la troiſiéme & quatriéme Equation.*



Soit la Parabole donnée AG, dont le Parametre ſoit AB, ſi l'on ſuppoſe que la quantité indéterminée $i$ de la troiſiéme Equation, ſoit égale à AB, il eſt évident que la Parabole donnée ſera la conſtruction du lieu de cette troiſiéme Equation.

Pour la quatriéme Equation au Cercle $yy - iy + \frac{aay}{i} + xx - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} \propto o$, il la faut réduire en prenant $z \propto y - \frac{1}{2}i + \frac{\frac{1}{2}aa}{i}$; & $t \propto x - \frac{\frac{1}{2}aab}{ii}$, ou bien $\propto \frac{\frac{1}{2}aab}{ii} - x$, & on aura $zz + tt \propto \frac{1}{4}ii - \frac{1}{2}aa + \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4} + \frac{aabc}{ii}$, ce qui montre que pour la conſtruction de ce Cercle qui doit être combiné avec la Parabole, il faut prendre $AI \propto \frac{1}{2}i$ & $ID \propto \frac{\frac{1}{2}aa}{i}$;

& du point D ayant élevé DN perpendiculaire à l'axe DK, & ayant fait cette ligne DN ∞ $\frac{\frac{1}{2}aab}{ii}$, il eſt évident par la Conſtruction des Lieux que le point N doit être le centre du Cercle dont NM ſera le demi-diametre, que l'on trouvera en tirant NA, & du point A élevant AM perpendiculaire à NA & ∞ $\sqrt{\frac{aabc}{ii}}$, la ligne NM ſera

$$\infty \sqrt{\tfrac{1}{4}ii - \tfrac{1}{2}aa + \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4} + \frac{aabc}{ii}}$$

ſelon qu'il eſt requis par la réduction.

Je dis que les lignes GK, FL menées des points de rencontre du Cercle & de la Parabole, ſont les racines réelles de cette Equation, à ſçavoir GK les vrayes, & FL les fauſſes.

## DEMONSTRATION

Soit GK $\propto x$, & AK $\propto y$.

A cauſe de la Parabole AG, le quarré de GK eſt égal au rectangle AK, AB : mais AB étant $\propto i$, on aura l'Equation $xx \propto iy$, ou bien $\frac{xx}{i} \propto y$.

Et à cauſe du Cercle le quarré de NG eſt égal au quarré de DK plus le quarré de ND moins GK, ou de GK moins ND, ce qui eſt en termes analytiques $\frac{3}{4}ii - \frac{1}{2}aa + \frac{\frac{1}{4}i^4}{ii} + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^3} + \frac{aabc}{ii} \propto yy - iy + \frac{aay}{i} + \frac{1}{4}ii - \frac{1}{2}aa + \frac{\frac{1}{4}a^4}{ii} + \frac{\frac{1}{4}a^4bb}{i^4} - \frac{aabx}{ii} + xx$, laquelle Equation ſe réduit à $yy - iy + \frac{aay}{i} + xx - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} \propto o$, & ſi dans cette

Equation à la place de $y$ on ſubſtituë ſa valeur trouvée $\frac{xx}{i}$ par le moyen de la Parabole, on aura $\frac{x^4}{ii} - xx + \frac{aaxx}{ii} + xx - \frac{aabx}{ii} - \frac{aabc}{ii} \propto o$, qui ſe réduit à $x^4 + aaxx - aabx - aabc \propto o$, qui eſt l'Equation propoſée qu'il falloit conſtruire.

Il eſt évident que l'on peut trouver des lieux pour les autres conſtructions ſuivant la propoſition, comme on a fait dans les cubiques.

## CONSTRUCTION

*Avec une Ellipſe ou une Hyperbole donnée combinée avec le Cercle, ou avec un Cercle donné & une Section Conique ſemblable à une donnée.*

### 2. EXEMPLE.

Soit une Equation propoſée $x^3 * - aaxx - aabx + aabc \propto o$.

Pour faire comme dans le troiſiéme Exemple de la Seconde Partie du Chapitre precedent, il faut prendre l'inconnuë $v$ & l'indéterminée $i$, en ſorte que $\frac{av}{i}$ ſoit $\propto x$, & ſubſtituant cette valeur à la place de $x$ dans l'Equation propoſée, on a la ſuivante $\frac{a^4v^4}{i^4} * - \frac{a^4vv}{ii} - \frac{a^3bv}{i} + aabc \propto o$, qui ſe réduit à

I. Equation. $v^4 * - iivv - \frac{i^3bv}{a} +$ $\frac{i^4bc}{aa} \propto o$, & prenant l'inconnuë $y$, en ſorte que $iy$ ſoit $\propto vv$, ſi dans le premier terme à la place de $v^4$ l'on ſubſtituë cette valeur, on aura l'Equation

II. $yy - vv - \frac{ibv}{a} + \frac{iibc}{aa} \propto o$, qui eſt un lieu à une Hyperbole équilatere telle que l'on voudra. Et dans cette ſeconde Equation à la place de $vv$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

III. $yy - iy - \frac{ibv}{a} + \frac{iibc}{aa} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra. Et combinant negativement la 2$^e$ & la troiſiéme, on a

IV. $iy - vv \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Parabole on voudra.

Et combinant negativement la 3$^e$ & la quatriéme, on a

V. $yy - 2iy + vv - \frac{ibv}{a} + \frac{iibc}{aa} \propto o$ qui eſt un lieu à quel cercle on voudra.

Et multipliant la quatriéme equation par l'indeterminée $k$ & la diviſant par $a$ on aura

VI. $\frac{kiy}{a} - \frac{kvv}{a} \propto o$. Et combinant affirmativement la ſixiéme & la ſeconde on a

VII. $yy + \frac{kiy}{a} \propto \frac{kvv + avv}{a} + \frac{ibv}{a} - \frac{iibc}{aa} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Hyperbole on voudra.

Et combinant negativement la ſixiéme & la troiſiéme, on a

VIII. $yy - iy - \frac{kiy}{a} + \frac{kvv}{a} - \frac{ibv}{a} + \frac{iibc}{aa} \propto o$, qui eſt un lieu à quelle Elipſe on voudra.

Et ſuivant les differentes combinaiſons, on trouvera une infinité de lieux à ces mêmes lignes courbes.

Il eſt évident que l'on peut conſtruire l'Equation propoſée, avec un Cercle donné & quelle Section Conique on voudra ſemblable à une donnée, en ſe ſervant de la cinquiéme Equation & des autres, où l'on doit faire les mêmes remarques que dans la Conſtruction des Equations Cubiques. Je rapporteray ſeulement icy, le plus en abregé que je pouray, une Conſtruction avec l'Hyperbole donnée & le Cercle.

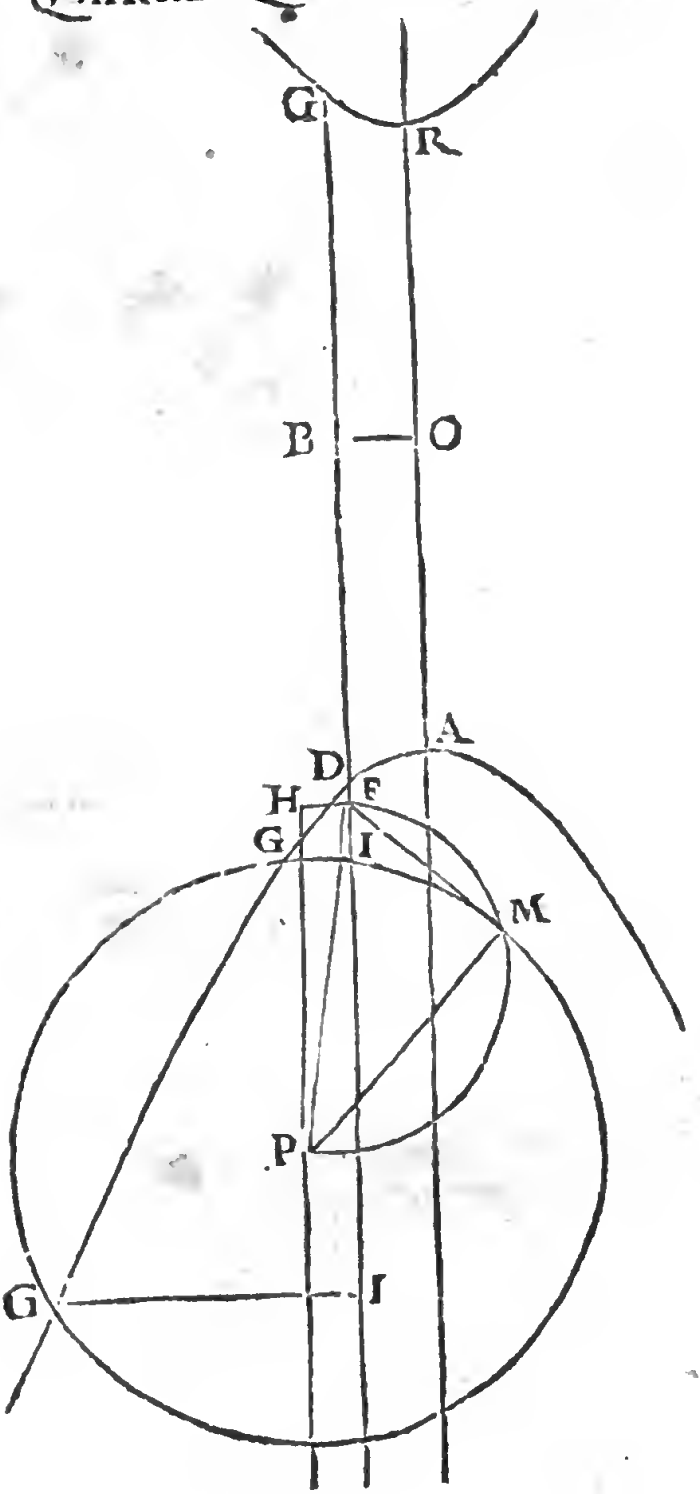
## CONSTRUCTION
### AVEC UNE HYPERBOLE DONNE'E COMBINE'E AVEC LE CERCLE.

*En ſe ſervant de la ſeptiéme, & de la cinquiéme Equation.*

Ayant pris $r \propto v + \frac{\frac{1}{2}ib}{a}$ & $ſ \propto y + \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$ pour la réduction de la ſeptiéme Equation, on a

*Equation réduite* $\left| \frac{krr + arr}{a} \propto ſſ + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka + aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{iibc}{aa} \right.$.

A cauſe de l'Hyperbole donnée AG, dont l'axe AR ſoit $\propto d$, & ſon parametre $\propto p$, pour déterminer la valeur de $k$ il faudra faire $k + a \mid a \parallel d \mid p$, d'où viendra l'Equation $k \propto \frac{ad}{p} - a$,


G
R
B
O
A
D
E
H
G
I
M
P
G
I

Et dans l'Equation réduite à la place de $k$, ſubſtituant cette valeur trouvée, ſeulement dans le premier terme, & la laiſſant dans les autres pour abreger le calcul, en changeant ſeulement les ſignes devant les impairs, ſi $k$ eſt une quantité negative, on aura

*Equation preparée.* $\frac{drr}{p} \propto ff + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{iibc}{aa}$, ſuppoſant que $k$ ſoit affirmative, & que la ſomme des quantitez $\frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{iibc}{aa}$ ait le ſigne —, ce qui doit être égal à $-\frac{1}{4}dd$, afin que le lieu trouvé ſoit à l'Hyperbole donnée, & qu'il ne ſoit pas neceſſaire de tranſpoſer l'Equation, on trouvera $ii \propto \frac{\frac{1}{4}kaadd + \frac{1}{4}a^3dd}{\frac{1}{4}k^3 + \frac{1}{4}kka - kbc - abc - \frac{1}{4}abb}$ ce qui détermine la grandeur de $i$ indéterminée.

C'eſt pourquoy ſi du centre O on mene OB perpendiculaire à l'axe AR, & qu'on la poſe $\propto \frac{\frac{1}{2}ib}{k+a}$ : & ayant mené BF parallele à l'axe, & l'ayant faite $\propto \frac{\frac{1}{2}ki}{a}$, le point F ſera l'origine du lieu requis, dont les parties de la tige FI ſeront $\propto y$, & les perpendiculaires GI à la ligne BF, ſeront les rameaux $\propto v$.

Maintenant pour la réduction du Cercle de la cinquiéme Equation, ayant pris $z \propto y - i$ ou bien $\propto i - y$, & $t \propto v - \frac{\frac{1}{2}ib}{a}$ ou bien $\propto \frac{\frac{1}{2}ib}{a} - v$, on la réduira à $zz + tt \propto ii + \frac{\frac{1}{4}iibb}{aa} - \frac{iibc}{aa}$, ce qui montre que du point F il faut mener FH perpendiculaire à BF & $\propto \frac{\frac{1}{2}ib}{a}$, & ayant mené HP

parallele à l'axe RA & ∞ *i*, le point P doit être le centre du Cercle dont le demi-diametre ſera PM ∞ $\sqrt{ii + \frac{\frac{1}{4}iibb}{aa} - \frac{iibc}{aa}}$, que l'on trouvera en tirant PF, & ſur le diametre PF ayant décrit le demi-cercle PMF, & y ayant appliqué la ligne FM ∞ $\sqrt{\frac{iibc}{aa}}$, il eſt évident que PM ſera la ligne que l'on cherche.

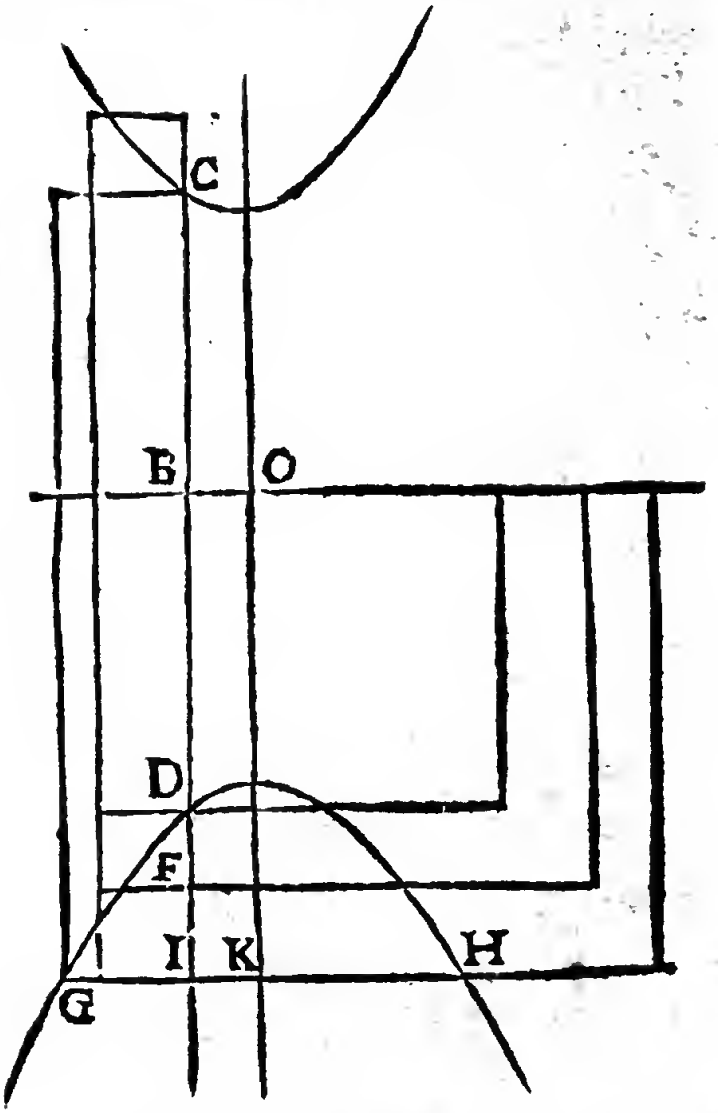
Si des points de rencontre G du Cercle & de l'Hyperbole, on mene les perpendiculaires GI à la ligne BF.

Je dis que ces lignes GI ſont les valeurs de *v*, & ſi l'on fait comme *i* à *a*, qu'ainſi GI ſoit à une autre, cette quatriéme proportionnelle ſera *x* qu'il falloit trouver.

On ne fera point la démonſtration de cette conſtruction, puiſqu'elle eſt ſi facile à faire en ſuivant la methode des precedentes, que ce ne ſeroit que groſſir

groſſir ce Traitté mal à propos.

On remarquera que dans ces Equations quarré-quarrées, l'origine du lieu requis F n'eſt jamais ſur la Section Conique en D, comme dans les Cubiques.




Car à cauſe de l'Hyperbole dans cette Exemple, le quarré de BO ∞ $\frac{\frac{1}{4}iibb}{kk+2ka+aa}$ à moindre raiſon au quarré de BF moins le quarré de

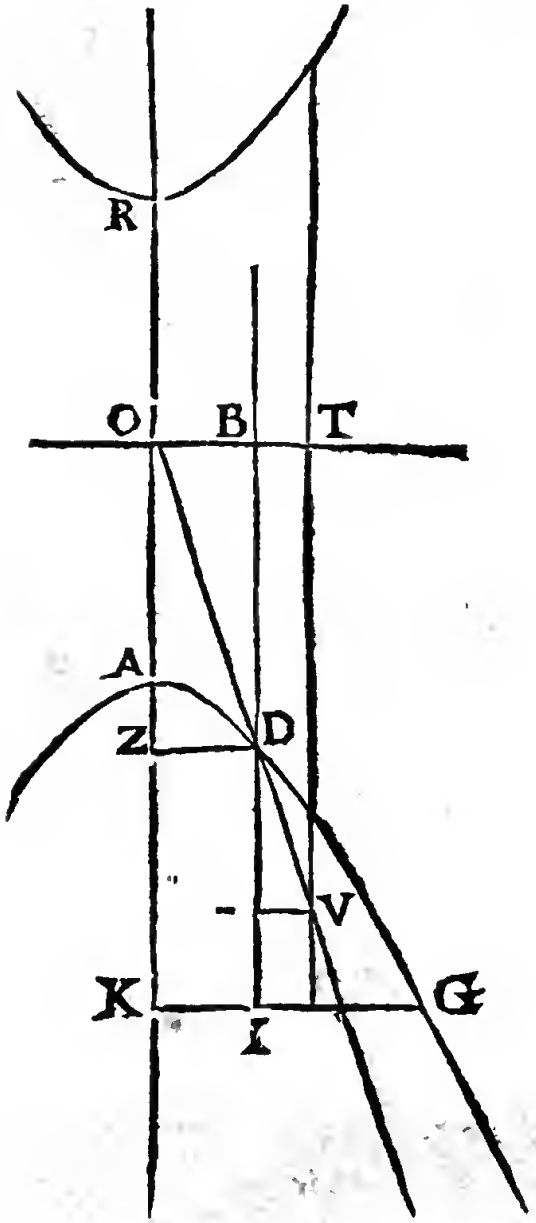
$OA \propto \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa}, + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{iibc}{aa}$, que si l'on ôte de cette partie le terme $\frac{iibc}{aa}$ qui y a le signe $+$, & auroit plus grande raison à cette même quantité que si l'on ajoûtoit ce terme lorsqu'il a le signe $-$, mais ce terme étant ôté ou ajoûté, cette raison est $\| a \mid k+a$, ou bien $\| p \mid d$ comme dans les Cubiques ; & c'est ce qui fait voir que le point F ne tombe pas sur la Section Conique en D, & que le rectangle CF,FD est $\propto \frac{iibc}{aa}$ qui est la difference des quarrez BF, BD.

Car si l'on fait comme le parametre de l'axe à l'axe, c'est à dire $\| a \mid k+a$, ainsi le quarré $OB \propto \frac{\frac{1}{4}iibb}{kk+2ka+aa}$ a une quatriéme pro-

portionnelle qui ſera $\propto \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa}$, & qui eſt $\propto$ au quarré de BD moins le quarré de OA à cauſe de l'Hyperbole, & le quarré de BF eſt $\propto \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa}$. Donc $\frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} - \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} + \frac{\frac{1}{4}iibb}{ka+aa} - \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} + \frac{iibc}{aa}$ qui ſe réduit à $\frac{iibc}{aa} \propto$ au rectangle CF, FD.

C'eſt pourquoy l'on poura de la même maniere que dans les Equations Cubiques, trouver le point D & en ſuite le point F ſans aucune réduction, $k$ étant ſeulement déterminée, & par ce moyen on trouvera la valeur de l'indéterminée $i$.

Car la raiſon du quarré de OB au quarré de BD étant $\| \frac{\frac{1}{4}iibb}{kk+2ka+aa} \mid \frac{\frac{1}{4}iikk}{aa} - \frac{iibc}{aa}$, ou bien $\| \frac{1}{4}bbaa \mid$




$\frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}ak^3 + \frac{1}{4}aakk - bckk - 2bcak - bcaa$, & ayant décrit le rectangle

OV dont ſes côtez ſoient ſur les axes & un angle au centre O, en ſorte que le quarré du côté OT ſoit au quarré du côté TV en la raiſon cy-deſſus trouvée, il eſt évident que la diagonale OV prolongée s'il eſt neceſſaire, coupera la Section en D, comme on a fait voir dans les Cubiques, & ſuivant les mêmes remarques qui y ſont; car OB étant $\infty \frac{\frac{1}{2}ib}{k+a}$, ſi l'on fait comme $\frac{1}{2}b$ à la ligne trouvée OB, ainſi $k+a$ à une autre, cette quatriéme proportionnelle ſera $\infty i$ que l'on cherche.

# CHAPITRE IV.

## DE LA CONSTRUCTION DES EQUATIONS SANS AUCUNE REDUCTION, ET DE QUELLE NATURE QU'ELLES SOIENT.

QUOYQUE l'on propoſe dans ce Chapitre une maniere de conſtruire les Equations en general ſans en faire évanoüir le ſecond terme par une operation particuliere, lorſqu'il s'y rencontre, ce n'eſt pas à dire pour cela que ce ſoit la plus ſimple & qu'on la doive preferer aux precedentes dans tous les cas, comme l'on poura voir en reſolvant des deux manieres les Equations propoſées pour en faire la conſtruction, & ce n'eſt proprement qu'une maniere particuliere de tirer les lieux de l'Equation propoſée qui a ſon ſecond terme, &

à même temps de le faire évanoüir; ſans quoy l'on ne pouroit pas avoir tous les lieux les plus ſimples pour ſa conſtruction.

Et comme il ſe pouroit trouver des cas où cela ſeroit utile, on propoſe les Exemples ſuivans, pour faire connoître comme on doit ſe ſervir de la Methode precedente pour en tirer les lieux dans leſquels on n'introduit point d'indéterminée, ce qui eſt facile à faire lorſqu'il eſt neceſſaire, en ſuivant la methode des Chapitres precedens.

## 1. EXEMPLE.

### *D'une Equation Cubique, ou quarré-quarrée.*

Soit une Equation propoſée
$x^3 + axx - abx - abc \propto o$.

Ayant multiplié cette Equation par ſa racine $x$ pour en pouvoir tirer les lieux, on a
$x^4 + ax^3 - abxx - abcx \propto o$, & ayant

pris l'inconnuë $y$, en ſorte que $ay$ ſoit $\propto xx+\frac{1}{2}ax$, ou bien $ay-\frac{1}{2}ax \propto xx$, ce qui ſe doit faire ainſi pour faire évanoüir le ſecond terme $ax^3$; car à la place du quarré de $xx+\frac{1}{2}ax$ qui eſt $x^4+ax^3+\frac{1}{4}aaxx$, ſubſtituant ſa valeur $aayy$, on fait évanoüir $ax^3$ dans l'Equation propoſée; c'eſt pourquoy ſi dans le premier & le ſecond terme on ſubſtituë la valeur de $xx$, on aura

I. Equation. $ayy-\frac{1}{4}axx-bxx-bcx \propto o$, qui eſt un lieu à une Hyperbole; & dans celle-cy à la place de $xx$ ſubſtituant encore ſa valeur, on a

II. $ayy-\frac{1}{4}aay+\frac{1}{8}aax-bay+\frac{1}{2}bax-bcx \propto o$, qui eſt un lieu à une Parabole, & combinant la premiere & la ſeconde negativement, on a $\frac{1}{4}aay+bay-\frac{1}{8}aax-\frac{1}{2}bax-\frac{1}{4}axx-bxx \propto o$ qui étant diviſée par $\frac{1}{4}a+b$, donnera

III. $ay-\frac{1}{2}ax-xx \propto o$, qui eſt un lieu à une Parabole.

Et par le moyen de ces Equations, en ſuivant les regles des combinaiſons, on en trouvera une infinité d'autres aux Sections Coniques & une au Cercle, & la conſtruction combinée de ces lieux donnera celle de l'Equation propoſée.

Il eſt évident qu'il n'y aura pas plus de difficulté à conſtruire une Equation quarré-quarrée.

Il n'eſt pas toûjours neceſſaire de multiplier par leurs racines les Equations plus compoſées, lorſque le nombre des dimenſions de l'inconnuë eſt impair, pour en tirer les lieux pour leur conſtruction, principalement lorſqu'on ne veut pas chercher tous ceux qui y peuvent ſervir.

## 2. EXEMPLE.

### *D'une Equation de ſix Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée qui n'a point de ſecond terme $x^6 + aax^4 - aabx^3 - aabcxx - aabcdd \propto 0$.

Ayant pris $ay \propto xx$, & ſubſtituant dans le premier & ſecond terme cette valeur de $xx$, on a

I. Equat. $y^3 + ayy - \frac{bx^3}{a} - \frac{bcxx}{a} - \frac{bcdd}{a} \propto o$, qui eſt un lieu du ſecond genre. Et dans le troiſiéme terme de cette Equation ſubſtituant encore ſa valeur, on a

II. $y^3 + ayy - bxy - \frac{bcxx}{a} - \frac{bcdd}{a} \propto o$, qui eſt encore un lieu du ſecond genre. Et combinant negativement ces deux Equations, on a

III. $ay - xx \propto o$, qui eſt un lieu du premier genre, à ſçavoir une Parabole.

Et ſubſtituant diverſement dans les termes de l'Equation propoſée la valeur de $xx$, on aura encore d'autres lieux du ſecond genre, qui étant combinez enſemble, en donneront une infinité d'autres.

Mais il ne faut pas pretendre d'en trouver un autre du premier genre, qui avec le troiſiéme contienne toutes les quantitez connuës de l'Equation propoſée ; car ſi cela étoit poſſible, il s'enſuivroit que l'on pouroit conſtruire l'Equation propoſée avec deux lieux du premier genre, ce qui ne ſe peut pas faire, car elle pouroit être réduite à une Cubique, ou quarré-quarrée.

## *Autre maniere de tirer les lieux de l'Equation propoſée.*

Si au lieu de $ay \propto xx$, on avoit pris $aay \propto x^3$, ce qui ſe pouvoit auſſi faire, & ſubſtituant dans les deux premiers termes la valeur de $x^3$, on auroit

I. $yy + xy - \frac{bx^3}{aa} - \frac{bcxx}{aa} - \frac{bcdd}{aa} \propto o$,

qui eſt un lieu à une ligne du ſecond genre ; & ſubſtituant dans le troiſiéme terme de celle-cy à la place de $x^3$ encore ſa valeur, on aura.

II. $yy + xy - by - \frac{bcxx}{aa} - \frac{bcdd}{ae} \propto o$,

qui eſt un lieu à une Hyperbole.

Et combinant negativement la premiere & la deuxiéme, on a

III. $aay - x^3 \propto o$, qui eſt un lieu à une Parabole du ſecond genre, & ſuivant les regles des combinaiſons, on en trouvera une infinité d'autres, qui avec cette Hyperbole dõneront la conſtruction de l'Equation propoſée.

## REMARQUES GENERALES.

En tirant les lieux de l'Equation propoſée, on peut auſſi faire en ſorte que la place du ſecond terme, du troiſiéme, &c. y ſoit vuide, ſuivant les dimenſions de l'inconnuë à laquelle on ſuppoſe égale une autre inconnuë jointe avec des connuës, comme les Exemples le vont faire voir.

Dans l'Exemple precedent qui n'a point de ſecond terme, ſi l'on prend

$aay \propto x^3 + \frac{1}{2}aax$, dont le quarré ſera $a^4yy \propto x^6 + aax^4 + \frac{1}{4}a^4xx$, ou bien $a^4yy - \frac{1}{4}a^4xx \propto x^6 + aax^4$, & à la place de $x^6 + aax^4$ dans l'Equation propoſée, on a $a^4yy - \frac{1}{4}a^4xx$.

Si l'Equation avoit eu le ſecond terme, on auroit pû faire encore la même choſe, car ſi elle eût eſté $x^6 - ax^5 + abx^4 - aacx^3 + aaddxx$, &c. en prenant $ady \propto x^4 - \frac{1}{2}axx + \frac{1}{2}abx - \frac{1}{8}aax$, dont le quarré eſt $aaddyy \propto x^6 - ax^5 + abx^4 - \frac{1}{2}aabx^3 + \frac{1}{8}a^3x^3 + \frac{1}{4}aabbxx - \frac{1}{8}a^3bxx + \frac{1}{64}a^4xx$, & à la place des trois premiers termes de l'Equation propoſée mettant leur valeur & réduiſant, on a $ddyy + \frac{1}{2}bx^3 - \frac{1}{4}bbxx$, &c.

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{8}a & +\frac{1}{8}ab \\ -c & -\frac{1}{64}aa \\ & +dd \end{array}$$

On auroit pû encore faire ſortir $-acx^3$ de l'Equation propoſée, comme auſſi les autres $x^3$ qui ſont dans la partie $\propto aaddyy$, ſi l'on avoit encore pris $-\frac{1}{2}ac$, &c. Il en eſt de même

pour le Cube que pour le Quarré.

Et ainſi des autres Equations plus compoſées.

Et par ces manieres differentes de tirer les lieux d'une Equation, & multipliant & diviſant les Equations trouvées par des quantitez connuës, & changeant auſſi la valeur des inconnuës en d'autres, &c. on trouvera des lieux du premier genre, un ſeulement dans chaque Equation propoſée, dont on en poura faire la conſtruction avec les autres lieux.

## 3. EXEMPLE.

### *D'une Equation de ſept Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée
$x^7 - ax^6 - aabx^4 + aabcx^3 + aabbcdx - aabbcde \propto o$.

Ayant pris $ay \propto xx$, & ſubſtituant cette valeur dans les trois premiers termes de cette Equation, on a

I. $y^3x - ay^3 - \frac{bx^4}{a} +$

tion de ſept dimenſions avec deux lieux, dont les inconnuës dans chacun auront ſeulement trois dimenſions, comme on verra dans l'Exemple ſuivant.

## 4. EXEMPLE.

### *D'une Equation de ſept Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée
$x^7 + ax^6 - abx^5 + abcx^4 + a^3dx^3 + a^4exx - a^5fx - a^6g \propto o$.

Ayant pris $aay \propto x^3$, & dans le premier & le ſecond terme de l'Equation propoſée ſubſtituant la valeur de $x^6$, & dans le troiſiéme & le quatriéme celle de $x^3$, on aura

I. Equation. $ayyx + aayy - byxx + bcyx + dx^3 + aexx - aafx - a^3g \propto o$, qui eſt un lieu à une ligne courbe qui n'a que trois dimenſions. Et ſi dans cette premiere Equation à la place de $x^3$ on ſubſtituë encore ſa valeur, on aura

II. $ayyx + aayy - byxx + bcyx +$

$aady + aexx - aafx - a^3g \propto o$, qui eſt un lieu où les inconnuës n'ont que 3 dimenſions.

Et combinant la premiere & la ſeconde negativement, on aura

III. $aay - x^3 \propto o$, qui eſt encore un lieu où les inconnuës n'ont que trois dimenſions, & la conſtruction combinée de ces deux lieux donnera celle de l'Equation propoſée.

Il eſt évident que ſi l'on n'affecte pas de ſe ſervir dans toutes les conſtructions, de lieux de deux dimenſions, qui ſont ceux que M. Deſcartes appelle du premier genre, on en poura trouver de plus ſimples que ceux qui y devoient ſervir pour la conſtruction, comme on a pû remarquer dans les deux Exemples precedens, où en y en employant un de de deux dimenſions, il en faut un autre qui en ait quatre, ce qui ſe peut auſſi faire avec deux de trois chacun.

Si l'Equation propoſée avoit 8 ou 9 dimenſions, il ne faudroit pas des

lieux qui euſſent plus de dimenſions que pour 7, c'eſt à dire trois : car ſi elle en avoit 8, en la multipliant par ſa racine, on la fera monter juſques à 9, & en introduiſant la quantité inconnuë pour trouver les lieux, on fera évanoüir les 2 ou 3 premiers termes de l'Equation propoſée, comme il a eſté enſeigné dans la remarque du ſecond Exemple de ce Chapitre.

Si l'on a bien entendu ce qui a eſté expliqué juſques-icy, on n'aura aucune difficulté dans les autres Exemples, & l'on poura pouſſer ce travail auſſi loin que l'on voudra.

Ayant examiné pluſieurs Exemples d'Equations plus compoſées que les precedentes, dont les calculs ſont tres-longs, & dont je n'ay pû découvrir les lieux les plus ſimples qui peuvent ſervir à leur conſtruction, que par une recherche tres-penible, j'ay trouvé que

| Si l'inconuë de l'Equation a de dimenſions | Il faut neceſſairement pour la conſtruire 2 lieux dont les inconnuës auront de dimenſions | |
|---|---|---|
| | 2 dans l'un | 1 dans l'autre 2 |
| 4 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 3 |
| 9 | 3 | 3 |
| 12 | 3 | 4 |
| 15 | 3 | 5 |
| 16 | 4 | 5 |
| 18 | 3 | 6 |
| 20 | 4 | 6 |

& que celles qui ſont compriſes entre deux de celles-cy, ne peuvent être conſtruites que comme la plus haute des deux. Mais n'ayant pû remarquer aucun ordre dans les cas cy-deſſus poſez que j'ay examinez, hormis dans le commencement, j'ay abandonné cette recherche, & je me ſuis appliqué aux conſtructions des

Equations pour les moyennes proportionelles, qui ſont fort ſimples de leur nature, car elles ne contiennent que deux termes, dont l'un eſt tout connu & l'autre inconnu, & ſans avoir égard à ces ſortes d'Equations qui peuvent être déprimées comme elles ſont la pluſpart, j'ay trouvé que generalement

| Si l'inconnüe d'une Equation a de Dimenſions | elle pourra eſtre conſtruite avec deux lieux, dont les inconnuës auront de dimenſions dans l'un 1, dans l'autre 2 |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 4 | 2 2 |
| 6 | 2 3 |
| 9 | 3 3 |
| 12 | 3 4 |
| 16 | 4 4 |
| 20 | 4 5 |
| 25 | 5 5 |
| 30 | 5 6 |
| 36 | 6 6 |
| 42 | 6 7 |
| 49 | 7 7 |
| 56 | 7 8 |
| 64 | 8 8 |

Et ainſi de ſuite dans ce même ordre, & les Equations qui ſont entre deux ne peuvent être conſtruites que comme la plus proche ſuperieure.

Je rapporteray les Exemples ſuivans de ces ſortes d'Equations qui ne peuvent point être déprimées, pour faire voir la verité de ce que j'avance.

## 5. EXEMPLE.

### *D'une Equation de onze Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée $x^{11} - a^{10}b \propto o$, qui eſt pour trouver 10 moyennes proportionelles entre les extrêmes $a$ & $b$.

Cette Equation étant multipliée par ſa racine, on aura $x^{12} - a^{10}bx \propto o$, & ayant pris $aay \propto x^3$, & ſubſtituant à la place de $x^3$ ſa valeur dans le premier terme, on a

I. Equation, $y^4 - aabx \propto o$, qui eſt un lieu dont les inconnuës ont 4

dimenſions : mais ſi l'on met ſeulement à la place de $x^9$ ſa valeur, on aura $\frac{y^3x^3}{aa} - aabx \propto o$, & combinant negativement cette Equation avec la premiere, on aura

II. $aay \propto x^3$, qui eſt un lieu où les inconnuës ont ſeulement trois dimenſions, & la conſtruction combinée de ces deux lieux donnera celle de l'Equation propoſée.

On pouroit auſſi conſtruire cette Equation avec une ligne du premier genre & une du troiſiéme, comme il eſt évident par les methodes precedentes.

## 6. EXEMPLE.

### *D'une Equation de* 13. *Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée $x^{13} - a^{12}b \propto o$, qui eſt pour trouver douze moyennes proportionelles entre les extrêmes données $a$ & $b$.

Ayant pris $a^3y \propto x^4$, & ayant fait

comme en l'Exemple precedent, on trouvera les deux lieux.

I. $y^3x - a^3b \propto o$, &

II. $a^3y - x^3 \propto o$, qui donneront la conſtruction de l'Equation propoſée.

## 7. EXEMPLE.

### *D'une Equation de 17. Dimenſions.*

Soit une Equation propoſée $x^{17} - a^{16}b \propto o$, qui eſt pour trouver 16 moyennes proportionelles entre $a$ & $b$.

Ayant pris $a^3y \propto x^4$, & à la place de $x^{16}$ ſubſtituant ſa valeur, on aura

I. Equation. $y^4x - a^4b \propto o$, qui eſt un lieu où les inconnuës ont 5 dimenſions, & l'on trouvera l'autre comme cy-devant.

II. $a^3y - x^4 \propto o$, qui eſt un lieu où les inconnuës ont 4 dimenſions. Et ces deux lieux donneront la conſtruction de l'Equation propoſée.

Semblablement ſi l'on veut trouver

22 moyennes proportionelles entre les extremes $a$ & $b$, on aura l'Equation $x^{23} - a^{22}b \propto o$, qui étant multipliée par le quarré de ſa racine, ſera $x^{25} - a^{22}bxx \propto o$, que l'on poura conſtruire avec deux lieux qui auront chacun 5 dimenſions.

Si l'on en veut avoir 30, l'Equation ſera $x^{31} - a^{30}b \propto o$, ou bien $x^{36} - a^{30}bx^5 \propto o$, que l'on conſtruira avec deux lieux de 6 dimenſions chacun, & ainſi des autres.

---

# CONCLUSION

## DE CE TRAITTÉ.

LES Exemples precedens, font voir clairement la verité de la Régle que j'ay donnée dans la Methode pour la Conſtruction des Equations avec des Lieux du premier genre, laquelle eſt tres-differente & de beaucoup plus ſimple que celle de

Monſieur Deſcartes ; car par exemple, où il faudroit un lieu du neufiéme genre avec un du premier, je trouve qu'il n'en faut qu'un du cinquiéme avec un du premier.

La raiſon qu'il donne de la diſtribution des genres des lieux, n'a aucun fondement, comme l'a fort bien remarqué Monſieur de Fermat, dans la Diſſertation qu'il a faite de la Solution des Problemes de Geometrie, & où il le reprend non ſeulement ſur ce ſujet, mais auſſi ſur la Conſtruction des Equations, ou des Problemes; car il donne une Methode pour les conſtruire avec deux lieux, dont les inconnuës de l'un n'ont pas tant de dimenſions, que ceux que Monſieur Deſcartes y preſcrit, mais l'autre eſt auſſi plus compoſé que celuy dont il veut qu'on ſe ſerve, qui eſt le plus ſimple de tous, à ſçavoir le Cercle, ou une Section Conique, qui n'ont que deux dimenſions, ou degrez.

Voicy la Regle que Monſieur de

Fermat donne pour ces Conſtructions. Si l'inconnuë de l'Equation a 3 ou 4 degrez, il faut deux lieux où les inconnuës ayent dans chacun 2 degrez ou dimenſions : ſi elle en a 5 ou 6, il en faut qui en ayent 3 : ſi elle monte juſques à 7 ou 8, il en faut qui en ayent 4 : ſi elle va juſques à 9 ou 10, il en faut qui en ayent 5 ; & ainſi de ſuite à l'infini, où l'on doit obſerver qu'il ſe ſert toûjours de deux lieux de meſmes degrez.

Sa Maniere d'operer, eſt premierement d'élever l'Equation au nombre pair, ſi elle n'y eſt pas ; enſuite il ôte le terme de l'Equation, où l'inconnuë eſt affectée ſous le côté qui eſt le penultiéme lorſque tous les termes ſont remplis, & lorſqu'on la fait ∞ 0, & enfin il prend la racine de la plus haute dimenſion de l'inconnüe de l'Equation avec d'autres termes où il introduit une autre inconnüe, ce qu'il compare aux deux parties de ſon Equation, dont l'une des parties

contient le terme tout connu, d'où il luy vient deux lieux qui ne peuvent être par ce moyen plus ſimples que la Regle qu'il en a donnée.

Le premier Exemple qu'il propoſe dans la Seconde Partie de ſa Diſſertation, eſt une Equation de 6 degrez, & par ſa Methode de tirer les lieux, il en trouve deux qui ont chacun 3 degrez, & qui ſervent pour ſa Conſtruction.

Le ſecond, eſt une Equation de 7 ou 8 degrez, & ſi elle n'en a que 7, il la fait multiplier par ſa racine pour la faire monter juſques à 8, & il en tire deux lieux qui ont chacun 4 degrez, qui ſervent pour ſa conſtruction, & ainſi des autres.

Je remarque premierement, que Monſieur de Fermat demeure d'accord avec Monſieur Deſcartes pour les Equations qui ne ſurpaſſent pas 4 degrez; car ordinairement toutes les Methodes reviennent à la même, dans des cas qui ne ſont pas compoſez.

Pour celles qui vont juſques à 6, il ſe ſert de deux lieux qui ont 3 degrez chacun, & Monſieur Deſcartes y en employe un ſeul de 3 degrez & un autre de deux, qui eſt le Cercle; ce qui eſt en quelque façon plus ſimple: Mais pour les autres qui ſont plus compoſées, la Methode de Monſieur de Fermat eſt plus abregée que celle dont Monſieur Deſcartes jugeoit qu'il falloit ſe ſervir.

La Methode dont je me ſers, & que j'ay donnée dans ce Traitté, eſt de beaucoup plus ſimple que celle de Monſieur de Fermat; car premierement, le 2. Exemple du dernier Chapitre, eſt une Equation de 6 dimenſions, que je conſtruis comme toutes les autres ſans aucune preparation ny réduction, comme font Meſſieurs Deſcartes & de Fermat, avec deux lieux, dont l'un a 3 degrez & l'autre 2, ce que Monſieur de Fermat fait avec deux de 3 chacun. Le 4^e^ Exemple eſt une Equation de 7 dimen-

ſions, que je conſtruis avec deux lieux de 3 degrez chacun, ce que Monſieur de Fermat ne peut faire qu'avec deux de 4; & enfin ſi l'on conſidere la Table des Equations que j'ay examinées, & que j'ay miſe à la fin de ce 4e Exemple, l'on trouvera que ma Methode eſt plus ſimple & plus abregée que la ſienne : car où il ſe ſert de deux lieux de 6 degrez, je n'y en employe qu'un de 3 & un de 4; & où il luy en faudroit deux de 10 chacun, je le fais avec un de 4 & un de 6.

Pour ce qui eſt des Equations des moyennes proportionelles, ſa Methode eſt fort bonne, & la Regle que j'ay donnée eſt la même que celle qu'il propoſe, quoyque nous y ſoyons venus par des voyes differentes, comme les derniers Exemples de ce Traitté le font voir

Il me reſteroit à expliquer encore d'autres manieres de tirer les lieux des Equations propoſées : Mais comme elles reviennent à celle que j'ay

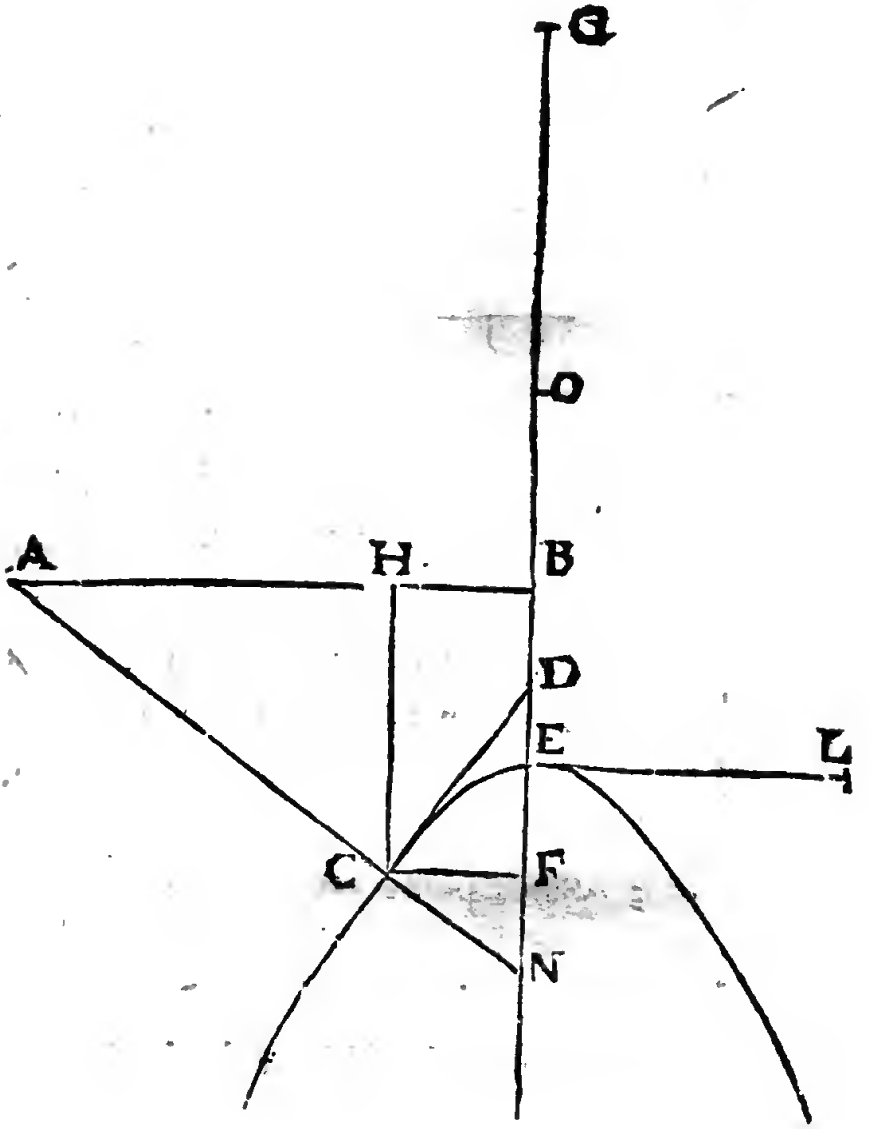
donnée, & qu'il m'auroit fallu expliquer de nouvelles découvertes que j'ay faites ſur les operations analytiques, j'ay jugé à propos de finir cet Ouvrage de peur d'être ennuyeux, & j'eſpere qu'un jour j'auray occaſion d'en faire part au Public.

## PROBLEME.

*Un point eſtant donné dedans ou dehors une Section Conique & ſur un meſme plan ; il faut mener une ligne perpendiculaire à la Section, c'eſt à dire une ligne qui faſſe un angle droit avec la touchante par le point de rencontre de la ligne menée & de la Section, en ne ſe ſervant que du Cercle & de la Section Conique donnée.*

CE Probleme eſt fort facile dans la Parabole, c'eſt pourquoy je ne feray la Conſtruction que pour les autres, & n'y ayant aucune difference entre l'Ellipſe & l'Hyperbole, comme on a pû remarquer dans les Exemples des Chapitres 2. & 3. de ce Traitté, ſi ce n'eſt que les lieux à l'Hyperbole doivent quelquefois être

changez ; je propoſeray dans cet Exemple l'Hyperbole comme la plus difficile.



L'Hyperbole CE & le point A étant donnez ſur un même plan ; il faut trouver le point C ſur l'Hyperbole, en ſorte que la ligne AC ſoit perpendiculaire à la touchante CD par le même point C.

GE ſoit l'axe de l'Hyperbole, & ſon parametre EL.

Conſiderant la choſe comme faite ; ſoit AB ∞ $a$, BE ∞ $d$, FE ∞ $x$, CF ∞ $y$, OE qui eſt la moitié de l'axe ∞ $r$, & EL ſon parametre ∞ $2f$.

Ayant prolongé AC juſques à l'axe en N, s'il eſt neceſſaire, & des points AC ayant mené AB, CF perpendiculaires à l'axe, & CH parallele à l'axe. A cauſe des triangles ſemblables, CH ſera à HA, comme NF à FC : mais NF eſt à FC, comme FC à FD, car le triangle NCD eſt rectangle ; c'eſt pourquoy on trouvera FD ∞ $\frac{ay-yy}{d+x}$.

Et à cauſe de l'Hyperbole le rectangle OF, FD ſera au quarré de

CF, comme la moitié de l'axe à la moitié de ſon parametre, ce qui eſt en termes analytiques

$$\frac{ray - ryy + xay - xyy}{d + x} \mid yy \parallel r \mid ſ,$$

d'où vient l'Equation

$$ryy \propto \frac{ſray - ſryy + ſxay - ſxyy}{d + x}, \text{ \& ré-}$$

duiſant, on a $y \propto \frac{ſra + ſxa}{dr + xr + ſr + ſx}$, & pour abreger le calcul, ſuppoſant $d + ſ \propto p$ & $r + ſ \propto q$, on a $y \propto \frac{ſra + ſxa}{pr + qx}$.

Mais encore à cauſe de l'Hyperbole le rectangle GF, FE eſt au quarré de FC, comme le demi-axe à ſon demi-parametre, ce qui eſt en termes analytiques $2rx + xx \mid yy \parallel r \mid ſ$, d'où vient l'Equation $ryy \propto 2ſrx + ſxx$, & dans cette Equation à la place de $yy$, ſubſtituant ſa valeur trouvée par l'autre Equation, on a

$$\frac{r^3ffaa+2ffaarrx+rffxxaa}{pprr+2pqrx+qqxx} \propto 2frx + fxx.$$

Et ſuppoſant pour abreger $\frac{rp}{q} \propto m$ & $\frac{rfaa}{qq} \propto nn$, on réduira l'Equation à

$$x^4 + 2rx^3 + 4rmxx + 2rmmx - rrnn \propto 0,$$
$$+2m \quad +mm \quad -2rnn$$
$$-nn$$

Pour la conſtruction ſuppoſant

$f \propto 2r+2m$
$fg \propto 4rm+mm-nn$
$ffh \propto 2rmmm-2rnn$
$ffll \propto rrnn$
$bb \propto fg-\frac{1}{8}ff$
$bbe \propto \frac{1}{8}f^3-\frac{1}{2}ffg+ffh$
$bbec \propto \frac{1}{16}f^3g-\frac{3}{32}f^4-\frac{1}{4}f^3h-ffll$

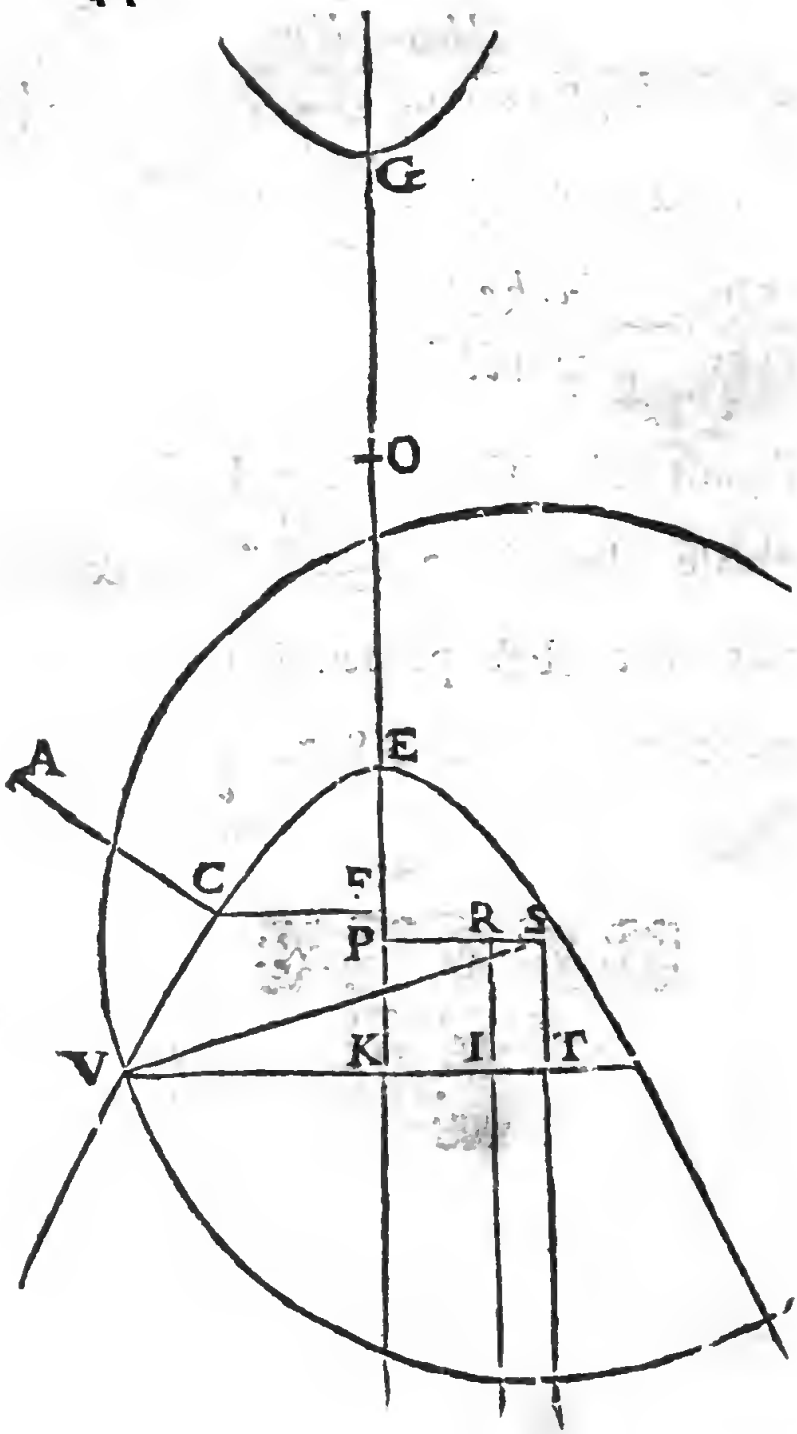
Si l'on prend encore $\pi \propto \frac{br}{f}-b$, on aura $r \mid f \parallel \pi+b \mid b$, & ſuppoſant $kk \propto$

$$\frac{\pi bbrr + b^3rr}{2\pi bb + b^3 + \frac{5}{4}\pi\pi b + \frac{1}{4}\pi^3 + \pi ec + bec - \frac{1}{4}be\pi}$$

on aura $rr \propto kk + \frac{\pi kk}{b} + \frac{\frac{1}{4}\pi\pi kk}{bb}$

$+ \frac{eckk}{bb} - \frac{\frac{1}{4}eekk}{\pi b + bb}$.

Ayant pris OP sur l'axe de l'Hyperbole donnée $\propto k + \frac{\frac{1}{2}\pi k}{b}$, & ayant mené PR perpendiculaire à l'axe & $\propto \frac{\frac{1}{2}ek}{\pi + b}$, & RS $\propto \frac{\frac{1}{2}ek}{b}$.


G
O
E
A
C
F
P
R
S
V
K
I
T

Du point S pour centre & pour demi diametre $SV \propto v \frac{eckk + \frac{1}{4}eke}{bb}$ ayant décrit le Cercle V*u*, qui coupe l'Hyperbole en ces points V *u*, & ayant mené les perpendiculaires V I, *u i* ſur la ligne RI, ſoit

$RI \propto s$, $VI \propto \zeta$

Et ſoit fait comme $k$ à $b$, ainſi $\zeta$ à $z$.
Et comme $k$ à $b$, ainſi $s$ à $u$.

d'où $\zeta \propto \frac{\zeta k}{b}$ & $s \propto \frac{vk}{b}$.

Ayant fait EF égale à $z - \frac{1}{4}f$; Je dis que cette ligne EF eſt $x$ que l'on cherche.

## DEMONSTRATION.

A cauſe de l'Hyperbole donnée le quarré de OK moins le quarré de OE eſt au quarré de KV comme $r$ à $f$, ce qui eſt auſſi comme $\pi + b$ à $b$: mais en termes analytiques le quarré de

$OK \propto ss + 2sk + \frac{\pi ks}{b} + kk +$

$\frac{\pi k k}{b} + \frac{\frac{1}{4}\pi\pi k k}{bb}$, & le quarré de OE $\propto rr$, qui eſt auſſi $\propto kk + \frac{\pi k k}{b} + \frac{\frac{1}{4}\pi\pi kk}{bb} + \frac{eckk}{bb} - \frac{\frac{1}{4}eekk}{\pi b + bb}$.

Et le quarré de KV $\propto \zeta\zeta - \frac{ek\zeta}{\pi + b} + \frac{\frac{1}{4}eekk}{\pi\pi + 2\pi b + bb}$, & à cauſe de la proportion precedente, on aura une Equation, qui étant réduite, ſera

I. Equation. $\frac{\pi\zeta\zeta + b\zeta\zeta}{b} - \frac{ek\zeta}{b} \propto ss + 2sk + \frac{\pi k s}{b} - \frac{eckk}{bb}$.

Mais à cauſe du Cercle V $u$, le quarré de VT plus le quarré de ST, eſt égal au quarré de SV, & en termes analytiques le quarré de VT $\propto \zeta\zeta + \frac{ek\zeta}{b} + \frac{\frac{1}{4}eekk}{bb}$

&

& le quarré de ST $\propto$ ss

& le quarré de SV $\frac{eckk + \frac{1}{4}eekk}{bb}$,

d'où on aura l'Equation,

II. Equat. $\zeta\zeta + \frac{ek\zeta}{b} + ss \propto \frac{eckk}{bb}$

Et combinant cette ſeconde Equation avec la premiere cy-deſſus trouvée, on en aura une, qui étant réduite, ſera

$2b\zeta\zeta + \pi\zeta\zeta \propto 2bsk + \pi sk$,

laquelle étant diviſée par $2b + \pi$, ſe réduit à $\zeta\zeta \propto ks$, ou bien à $\frac{\zeta\zeta}{k} \propto s$.

Et dans la premiere ou dans la ſeconde Equation cy-deſſus trouvée, à la place de s ſubſtituant ſa valeur, on aura $\frac{\zeta^4}{kk} + \zeta\zeta + \frac{ek\zeta}{b} \propto \frac{eckk}{bb}$.

Mais par la conſtruction $\zeta$ eſt $\propto \frac{kz}{b}$. C'eſt pourquoy ſi dans cette derniere Equation, on ſubſtituë à la

place de $\zeta$ ſa valeur, on aura

$$\frac{z^4kk}{b^4} + \frac{zzkk}{bb} + \frac{ekkz - eckk}{bb} \propto o,$$

ce qui étant multiplié par $b^4$, & le produit diviſé par $kk$, donnera

$$z^4 + bbzz + bbez - bbec \propto o.$$

Et à la place de $b$, $c$, $e$, ſubſtituant leurs valeurs, on aura

$$z^4 + fgzz + \tfrac{1}{8}f^3z - \tfrac{3}{16}f^4 \propto o,$$
$$- \tfrac{3}{8}ff - \tfrac{1}{2}ffg + \tfrac{1}{16}f^3g$$
$$+ ffh - \tfrac{1}{4}f^3h$$
$$- ffll$$

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que $z - \frac{1}{4}f$ ſoit appellée $x$, ou bien, ce qui eſt la même choſe, $x + \frac{1}{4}f \propto z$, cette $x$ ſera égale à EF ſuivant la Conſtruction, & ſi dans la derniere Equation à la place de $z$ on ſubſtituë cette valeur $x + \frac{1}{4}f$, on aura

$$x^4 + fx^3 + fgxx + \tfrac{1}{2}ffhx - ffll \propto o,$$

& ſi à la place de $f$, $g$, $h$, $l$, on ſubſtituë encore leurs valeurs, on aura

$$x^4 + 2rx^3 + 4rmxx + 2rmmx - rrnn \propto o,$$
$$+ 2m + mm - 2rnn$$
$$- nn$$

qui eſt la même Equation que celle qui étoit veniie dans la reſolution du Probleme, c'eſt ce qui montre que ſi du point F on éleve FC perpendiculaire à l'axe juſques à l'Hyperbole en C, la ligne AC eſt celle qui eſt requiſe.

On doit remarquer que les autres interſections de ce même Cercle & de l'Hyperbole, ou de ſon oppoſée, donnent les autres racines de l'Equation tant vrayes que fauſſes, s'il y en a qui ſoient réelles.

Il auroit eſté inutile de rapporter icy la Methode dont je me ſuis ſervi pour venir à la conſtruction que j'ay donnée, puiſque c'eſt la même que celle du Chapitre 3. où l'on peut voir qu'il n'y aura pas plus de difficulté à réſoudre ce Probleme, ſi c'eſtoit une Ellipſe donnée.

Pour ce qui regarde la valeur des termes de l'Equation, c'eſt à dire des ſignes + & — dont ils peuvent eſtre

affectez, cela ne peut apporter aucun changement, comme on a pû remarquer au même lieu.

FIN.

A01 146203

A.01 1462073